Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2013/2014
AL310 - Teoria di Galois (prof. Gabelli)
Esercizi 1

1. Siano $z, z' \in \mathbb{C}$. Verificare che
$$||z|| \cdot ||z'|| = ||zz'||$$
(dove, se $z = a + bi$, $||z|| = a^2 + b^2$ è la *norma* di z).

2. Si scrivano i seguenti numeri complessi, i loro coniugati ed i loro inversi in *forma trigonometrica*, ovvero nella forma $\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, con $\rho \in \mathbb{R}^+$, e $0 < \theta \leq 2\pi$:
$$5,\ -7,\ i,\ -3i,\ 1+i,\ -\sqrt{3}+i.$$
Determinare inoltre le loro radici terze e quarte e rappresentarle sul piano di Gauss.

3. Sia $\xi = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$ una radice n-sima dell'unità. Se m è il minimo intero positivo tale che $\xi^m = 1$, si dice che ξ ha *ordine* m. Con questa terminologia, le radici *primitive* n-sime sono esattamente quelle di ordine n.

   Dimostrare che:

   (1) Se k divide n, ξ ha ordine $\frac{n}{k}$;

   (2) Se m è l'ordine di ξ, m divide n (*Suggerimento*: dividere n per m);

   (3) Se $d := MCD(n,k)$, l'ordine di ξ è $\frac{n}{d}$;

   (4) ξ è una radice n-sima primitiva se e soltanto se $d := MCD(n,k) = 1$;

   (5) Se ξ è una radice n-sima primitiva, tutte e sole le radici n-sime di 1 sono
$$\xi, \xi^2, \dots, \xi^n = 1.$$

4. Determinare il gruppo delle radici n-sime dell'unità per
$$n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12.$$
Stabilire inoltre qual è l'ordine di ogni radice.

5. Calcolare i lati di un rettangolo la cui area è di 204 m^2 e il cui perimetro è di 80 m.

6. Sia $f(X) = X^3 + X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ e siano $\rho \in \mathbb{R}$, σ, τ le sue radici. Mostrare che $\sigma + \tau = -\rho$ e $\sigma\tau = \rho^{-1}$.

7. Mostrare che un polinomio $f(X) \in K[X]$ è irriducibile se e soltanto se lo è la sua forma ridotta.

8. Risolvere le seguenti equazioni di terzo grado usando le formule di Tartaglia -Cardano:
$$X^3 + 9X - 10\,, \quad X^3 + 6X - 20\,, \quad X^3 + 6X - 7.$$

9. Mostrare che l'equazione

$$f(X) = X^3 - 2pX + p \in \mathbb{Q}[X]$$

con p primo, ha tre radici reali distinte e determinare queste radici con le formule di Tartaglia-Cardano.

10. Trovare le radici dei seguenti *polinomi reciproci* usando la sostituzione $Y = X + \frac{1}{X}$:

$$X^4 + 2X^3 + 2X + 1\,; \quad X^5 + X^4 + X^3 - X^2 - X - 1.$$