Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2013/2014
AL310 - Teoria di Galois (prof. Gabelli)
Esercizi 2

1. Sia F un campo reale oppure $F = \mathbf{F}_p$ con $p \equiv 3 \mod (4)$. Mostrare che l'insieme delle matrici

$$\mathcal{M}_{a,b} = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \; ; \, a, b \in F \}$$

   è un campo, sottoanello dell'anello delle matrici quadrate di dimensione 2 a coefficienti in F.

   Se $F = \mathbf{F}_p$, quanti elementi ha $\mathcal{M}_{a,b}$?

2. Dire quale dei seguenti insiemi sono campi e quali no, giustificando la risposta:

   (a) $\mathbb{Q}[X]/(x^5 + 1)$
   (b) $\mathbb{Q}[X]/(x^5 + 2)$
   (c) $\mathbb{F}_5[X]/(x^2 + 1)$
   (d) $\mathbb{Z}[X]/(x^3 + x + 1)$
   (e) $\mathbb{Q}(\sqrt{3})[X]/(x^2 - 3)$

3. Costruire esplicitamente i campi $\mathbb{Q}(\alpha)$ per i seguenti valori di α:

$$\sqrt[5]{2}\,, \quad \sqrt{3} + 2i\,, \quad ln(2).$$

4. Costruire esplicitamente i campi:

$$\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})\,, \quad \mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{5} + 2i)\,, \quad \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3})\,, \quad \mathbb{Q}(\pi, 2 + i).$$

5. Siano a, b due interi positivi. Mostrare che

$$\mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b}) = \mathbb{Q}(x\sqrt{a} + y\sqrt{b}),$$

   per ogni x, $y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

6. Siano $m, n \geq 2$ due interi coprimi. Mostrare che
$$\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2},\ \sqrt[m]{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt[n]{2}\,\sqrt[m]{3}).$$

7. Mostrare che, per ogni $m, n \geq 2$,
$$\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2},\ \sqrt[m]{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt[r]{2}),$$
per un opportuno $r \geq 2$.

8. Sia K un ampliamento quadratico di $\mathbb{Q}$. Mostrare che $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, dove $d \in \mathbb{Z}$ ed è privo di fattori quadratici.

9. Sia $m \geq 2$ e $\xi_m = \cos(\frac{2\pi}{m}) + i\sin(\frac{2\pi}{m})$. Mostrare che $\mathbb{Q}(\xi_n) \subseteq \mathbb{Q}(\xi_{2n})$.
Mostrare inoltre che vale l'uguaglianza se n è dispari e dare un esempio in cui l'inclusione è stretta.

10. Determinare il grado di $\pi + \frac{1}{\pi}$ su $\mathbb{Q}(\pi^2)$.