Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2013/2014
AL310 - Teoria di Galois (prof. Gabelli)
Esercizi 3

1. Si dimostri che, se $n = 2^h$, con $h \geq 2$, le $\varphi(n)$ radici complesse primitive dell'unità non costituiscono una base dell'n-esimo ampliamento ciclotomico di $\mathbb{Q}$.

2. Sia $\xi_n := \cos(\frac{2\pi}{n}) + i\sin(\frac{2\pi}{n})$, $n \geq 2$. Mostrare che, se $MCD(m, n) = 1$, allora $\zeta := \xi_m \xi_n$ è una radice primitiva mn-sima dell'unità.

3. Mostrare che, se $\eta, \zeta \in \mathbb{C}$ sono radici primitive dell'unità di ordine n ed m rispettivamente, allora $\xi := \eta\zeta$ è una radice primitiva di ordine uguale a $mcm(n, m)$.

4. Sia ξ una radice primitiva nona dell'unità e sia $\alpha := \xi + \xi^{-1}$. Mostrare che il polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}$ è $m(X) := X^3 - 3X + 1$. Poiché la scelta di ξ è arbitraria, dedurne che le radici di $m(X)$ sono $\alpha, \beta := \xi^2 + \xi^{-2}, \gamma := \xi^4 + \xi^{-4}$ e perciò $m(X)$ ha tre radici reali. Mostrare inoltre che $\beta, \gamma \in \mathbb{Q}(\alpha)$.

5. Ricordiamo che una radice quinta primitiva dell'unità è

$$\varepsilon := \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} i.$$

   (a) Posto $\alpha := \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\ i$, dimostrare che $\mathbb{Q}(\varepsilon) = \mathbb{Q}(\alpha)$. Dire perché il grado di $\alpha + \epsilon$ su $\mathbb{Q}$ non può essere 3.

   (b) Calcolare il polinomio minimo $m(X)$ di α su $\mathbb{Q}$.

   (c) Verificare che $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ è il campo di spezzamento di $m(X)$ su $\mathbb{Q}$.

6. Sia $\zeta \in \mathbb{C}$ una radice primitiva ottava dell'unità. Dimostrare che $\mathbb{Q}(\zeta) = \mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$.

7. Sia $\alpha := \sqrt[4]{3}$ e $K := \mathbb{Q}(\alpha)$.

   (a) Determinare il polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}$.

(b) Verificare che $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \subseteq K$ e determinare il polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

(c) Posto $\beta := \sqrt{3}+\sqrt[4]{27}-2$, dire perchè $\beta \in K$, determinare l'inverso razionalizzato di β in K e il polinomio minimo di β su $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

8. Sia $K := \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})$.

   (a) Dimostrare che non esistono elementi $a, b \in \mathbb{Q}$ tali che $(a+b\sqrt{2})^2 = 5$.

   (b) Usando (a), calcolare il grado di $\sqrt{5}$ su $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

   (c) Usando (b), calcolare $[K : \mathbb{Q}]$ e determinare una base di K su $\mathbb{Q}$.

   (d) Dimostrare che $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{5})$.

9. Determinare il campo di spezzamento in $\mathbb{C}$ dei seguenti polinomi e calcolarne il grado su $\mathbb{Q}$:

$$X^4 - X^3 + 4X^2 - 3X + 3\,, \quad X^9 - 1\,, \quad X^7 - 2.$$

$$X^4 + X^2 - 1\,, \quad X^4 + 30X^2 + 45\,, \quad X^4 + X^3 + X^2 + X + 1.$$

10. Sia $c > 0$. Determinare il grado su $\mathbb{Q}$ del campo di spezzamento in $\mathbb{C}$ del polinomio $X^3 + cX + 1$.

11. Si costruisca un campo di spezzamento su $\mathbb{Q}$ dei polinomi

$$X^2 - 5\,, \quad X^5 + 2\,.$$

Si costruisca inoltre il loro composto e se ne determini il grado su $\mathbb{Q}$.

12. Sia $\alpha \in \mathbb{C}$ algebrico di grado n su $\mathbb{Q}$ e sia $\varphi_\alpha : \mathbb{Q}(\alpha) \longrightarrow \mathbb{Q}(\alpha)$ l'endomorfismo di $\mathbb{Q}(\alpha)$ (come $\mathbb{Q}$-spazio vettoriale) definito da $x \to \alpha x$.

    Mostrare che il polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}$ e il polinomio caratteristico di φ_α coincidono.