Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2013/2014
AL310 - Teoria di Galois (prof. Gabelli)
Esercizi 4

1. Mostrare che il campo di spezzamento in $\mathbb{C}$ di $f(x) = x^4 + 2x^2 + 9$ è $\mathbb{Q}(i\sqrt{2})$.

2. Mostrare che i polinomi $x^4 - 9$ e $x^4 - 2x^2 - 3$ hanno lo stesso campo di spezzamento in $\mathbb{C}$.

3. Sia $K = \mathbb{Q}(\sqrt{6}, \sqrt{14}, \sqrt{21})$.

   (a) Calcolare $[K : \mathbb{Q}]$ e trovare una base di K su $\mathbb{Q}$.

   (b) Dimostrare che K è il campo di spezzamento del polinomio $f(X) = X^4 - 40X^2 + 64 \in \mathbb{Q}$.

4. Determinare il campo di spezzamento su $\mathbb{Q}$ di uno dei seguenti polinomi:

$$X^4 - 9X^2 + 20\,; \quad X^4 - 4X^2 + 2\,; \quad X^4 - 2X^2 - 1$$

   e calcolarne il grado.

5. Siano K un campo, $f(X) \in K[X]$ un polinomio irriducibile, L un campo di spezzamento di f su K.

   (a) Dimostrare che se $\alpha, \beta \in L$ sono radici di $f(X)$, allora $K(\alpha)$ e $K(\beta)$ sono isomorfi come campi e come K-spazi vettoriali.

   (b) Stabilire, motivando la risposta, se l'asserzione (a) è vera quando $f(X)$ è riducibile.

6. Stabilire se $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ e $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ sono isomorfi come $\mathbb{Q}$-spazi vettoriali e/o come campi.

7. Sia $\varepsilon \in \mathbb{C}$ una radice terza primitiva dell'unità.

   (a) Dimostrare che $\varepsilon\sqrt[3]{3}$ è algebrico su $\mathbb{Q}$ e determinare il suo polinomio minimo $f(X)$ su $\mathbb{Q}$.

(b) Dedurre che $\mathbb{Q}(\varepsilon\sqrt[3]{3})$ e $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$ sono isomorfi come $\mathbb{Q}$-spazi vettoriali e come campi, e descrivere esplicitamente un isomorfismo fra essi.

(c) Determinare un campo di spezzamento K di $(x^2+1)f(X)$ su $\mathbb{Q}$ e calcolare $[K:\mathbb{Q}]$.

(d) Stabilire, motivando in modo esauriente la risposta, se esiste un polinomio $g(X)\in\mathbb{Q}[X]$ tale che $g(\sqrt[3]{3})=0$ e avente $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$ come campo di spezzamento su $\mathbb{Q}$.

8. Determinare tutti gli isomorfismi in $\mathbb{C}$ dei seguenti campi e stabilire quali tra essi sono automorfismi:

$$\mathbb{Q}(\sqrt{3});\quad \mathbb{Q}(\sqrt{2},i);\quad \mathbb{Q}(\sqrt[5]{3});\quad \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5},\sqrt{3}).$$

9. Sia $\xi\in\mathbb{C}$ una radice primitiva settima dell'unità e siano $\alpha:=\xi+\xi^{-1}$, $\beta:=\xi^3+\xi^5+\xi^6$. Determinare i polinomi minimi di α e β su $\mathbb{Q}$ e le loro radici. Quali di esse sono reali?

   Determinare inoltre i polinomi minimi di ξ su $\mathbb{Q}(\alpha)$ e $\mathbb{Q}(\beta)$.

10. Mostrare che la funzione φ di Eulero assume valori pari, per ogni $n\geq 3$.

11. Fattorizzare $\Phi_n(X)$ in polinomi irriducibili su $\mathbb{R}$.

12. Siano p un numero primo e $k\geq 1$ un intero. Sia $F\subseteq K$ un'estensione di campi di grado p^k. Sia $f(x)\in F[x]$ un polinomio ir- riducibile su F di grado strettamente compreso tra 1 e p. Dimostrare che $f(x)$ non ha radici in K.

13. Sia F un campo. Si consideri il polinomio

$$f(x)=p_1(x)^{m_1}p_2(x)^{m_2}\dots p_s(x)^{m_s}\in F[x],$$

   $m_i\geq 1$, decomposto nel prodotto dei polinomi irriducibili $p_i(x)\in F[x]$. Dimostrare che, scelti come si voglia gli interi positivi $n_1,n_2,\dots n_s$, $f(x)$ ed $g(x):=p_1(x)^{n_1}p_2(x)^{n_2}\dots p_s(x)^{n_s}$ hanno lo stesso campo di spezzamento su F.

14. Siano F un campo ed X una indeterminata su F. Dimostrare che se un elemento $f\in F(X)$ è algebrico su F allora $f\in F$.