Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2013/2014
AL310 - Teoria di Galois (prof. Gabelli)
Esercizi 5

1. Poniamo $K := \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$.
   (a) Stabilire se K è normale su $\mathbb{Q}$.
   (b) Determinare una chiusura normale N di K su $\mathbb{Q}$.
   (c) Determinare tutte le $\mathbb{Q}-$immersioni di K in $\mathbb{C}$.
   (d) Per ogni $\mathbb{Q}-$immersione φ di K in $\mathbb{C}$, determinare tutte le $\mathbb{Q}-$immersioni di N che estendono φ, e dedurre che tali estensioni sono $\mathbb{Q}-$automorfismi di N.
   (e) Determinare tutti gli elementi di $Gal_{\mathbb{Q}}N$.
2. Sia $m(X)$ il polinomio minimo su $\mathbb{Q}$ di $\sqrt[3]{5} + i$. Determinare tutte le radici complesse di $m(X)$.
3. Si consideri il polinomio $f := X^4 + X^3 + X^2 + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$.
   (a) Determinare un campo L contenente una radice α di f tale che $\alpha \notin \mathbb{F}_2$, e un'immersione $\iota : \mathbb{F}_2 \hookrightarrow L$.
   (b) Dimostrare che f si decompone in fattori lineari in $L[X]$ e quindi $\mathbb{F}_2(\alpha)$ un campo di spezzamento di f su $\mathbb{F}_2$.
4. Siano p, q numeri primi distinti.
   (a) Determinare un campo di spezzamento K del polinomio
   $$X^4 - (p+q)X^2 + pq \in \mathbb{Q}[X]$$
   su $\mathbb{Q}$.
   (b) Calcolare $[K : \mathbb{Q}]$, e determinare due basi distinte di K come $\mathbb{Q}-$spazio vettoriale.
   (c) Determinare tutte le ($\mathbb{Q}-$)immersioni di K in $\mathbb{C}$, e mostrare che ognuna di esse è un ($\mathbb{Q}-$)automorfismo di K.

5. Poniamo $\alpha := i + \sqrt[3]{7}$, $K := \mathbb{Q}(\alpha)$.

   (a) Determinare il grado del polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}$.

   (b) Dopo aver mostrato che $\mathbb{Q}(i) \subset K$, determinare tutte le $\mathbb{Q}(i)-$immersioni di K in $\mathbb{C}$.

   (c) Sia $\phi : K \longrightarrow \mathbb{C}$ un omomorfismo di campi non nullo. Determinare i possibili valori di $\phi(\alpha + \sqrt[3]{49})$.

6. Determinare per ciascuno dei seguenti polinomi di $\mathbb{F}_p[X]$ un campo di spezzamento su $\mathbb{F}_p$, per i valori di p a fianco indicati.

   Inoltre, determinare il grado su $\mathbb{F}_p$ di ciascuno dei campi di spezzamento trovati e dimostrare che due campi dello stesso grado sono isomorfi, costruendo esplicitamente tutti i loro isomorfismi.

   (a) $p = 2$; $X^3 + X + 1$, $X^3 + X^2 + 1$, $X^4 + X + 1$, $X^4 + X^2 + X^3 + X + 1$, $X^4 + 1$, $X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.

   (b) $p = 3$; $X^3 + 2X + 1$, $X^4 + 2$, $X^4 - X^3 - X - 1$.

   (c) $p = 5$; $X^3 + 2X + 1$.

   (e) $p = 7$; $X^3 - 3$, $X^4 + 5$.

   (m) $p = 13$; $X^3 - 5$.

7. Siano p un numero primo e U un'indeterminata su $\mathbb{F}_p$.

   (a) Posto $T := U^p, K := \mathbb{F}_p(T)$, verificare che $K(U) = \mathbb{F}_p(U)$.

   (b) Dire perchè ogni elemento di $\mathbb{F}_p(U)$ è algebrico su K.

   (c) Dimostrare che il polinomio $f := X^p - T \in K[X]$ è irriducibile su K. [Sugg.: ricordare che l'anello $\mathbb{F}_p[T]$ un dominio a fattorizzazione unica...]

   (d) Dimostrare che f ha un'unica radice in ogni suo campo di spezzamento.

   (e) Determinare un campo di spezzamento L di f su K, e calcolare $[L : K]$.

8. Mostrare che $a + bi$ è un numero complesso algebrico se e soltanto se a e b sono reali algebrici.

9. Mostrare che il numero $2 + \sqrt[11]{35} - 2548\sqrt[31]{987654321}$ è algebrico (su $\mathbb{Q}$).

10. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere e quali false, motivando brevementele risposte:

    (a) Ogni campo di caratteristica finita ha un numero finito di elementi;

    (b) Ogni estensione algebrica è finita;

    (c) Ogni estensione non algebrica è infinita;

    (d) Ogni estensione algebrica di $\mathbb{Q}$ è semplice;

    (e) Ogni estensione semplice di $\mathbb{Q}$ è algebrica;

    (f) Ogni estensione algebrica è finitamente generata;

    (g) Ogni estensione finita di $\mathbb{Q}$ è il campo di spezzamento di qualche polinomio a coefficienti razionali;

    (h) Se $F \subseteq L \subseteq K$, ogni elemento di K algebrico su F è anche algebrico su L ;

    (i) Se $F \subseteq L \subseteq K$, ogni elemento di K algebrico su L è anche algebrico su F;

    (j) Un campo finito può essere algebricamente chiuso.