Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2013/2014
AL310 - Teoria di Galois (prof. Gabelli)
Esercizi 4

1. Si consideri il polinomio $f := X^3 + 2X^2 + 2 \in \mathbb{F}_3[X]$.

   (a) Determinare un campo di spezzamento K di f su $\mathbb{F}_3$, e determinare un elemento $\alpha \in K$ tale che $K = \mathbb{F}_3(\alpha)$.

   (b) Scrivere tutti gli elementi di K.

   (c) Determinare tutti i generatori del gruppo moltiplicativo K^*.

   (d) Per ogni $\beta \in K \backslash \mathbb{F}_3$, determinare il polinomio minimo di β su $\mathbb{F}_3$.

   Sia L un'estensione di K e sia $\gamma \in L$ un elemento algebrico di grado 5 su K.

   (e) Dire perché γ è algebrico su $\mathbb{F}_3$ e determinare il grado del polinomio minimo di γ su $\mathbb{F}_3$.

   (f) Determinare la cardinalità del campo $K(\gamma)$.

2. Si considerino i polinomi

$$f := X^2 + X + 6, \quad g := X^2 + X + 3 \in \mathbb{F}_7[X].$$

   (a) Dopo aver aver verificato che gli anelli $K_f := \mathbb{F}_7[X]/(f), K_g := \mathbb{F}_7[X]/(g)$ sono campi, dire perché essi sono isomorfi e determinare tutti gli isomorfismi di K_f su K_g.

   (b) Poniamo $K := K_f$. Se $h \in K[X]$ è un polinomio irriducibile di grado due e L è un campo di spezzamento di h su K, determinare la struttura del gruppo $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{F}_7)$.

3. Sia K un campo con 16 elementi.

   (a) Determinare un polinomio $f(X) \in \mathbb{F}_2[X]$ irriducibile il cui campo di spezzamento su $\mathbb{F}_2$ sia K.

   (b) Determinare la struttura di $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{F}_2)$.

4. Siano p un numero primo, U un'indeterminata su $\mathbb{Q}$, $L := \mathbb{Q}(U^2)$, $K := \mathbb{Q}(U, \sqrt{p} + p)$.

   (a) Calcolare, dichiarando esplicitamente tutti i risultati usati, il grado di K su L.

   (b) Dire perch l'estensione di campi K/L è separabile e determinare un elemento primitivo α di K su L.

   (c) Determinare il polinomio minimo di α su L.

   (d) Determinare la struttura del gruppo $\mathrm{Gal}(K/L)$.

5. Si consideri il polinomio $f(X) := X^4 + X^3 + X^2 + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$.

   (a) Determinare un campo L contenente una radice α di $f(X)$ tale che $\alpha \notin \mathbb{F}_2$ e un'immersione $\varphi : \mathbb{F}_2 \hookrightarrow L$.

   (b) Dimostare che $f(X)$ si decompone in fattori lineari in $L[X]$.

   (c) Dedurre che $\mathbb{F}_2(\alpha)$ è un campo di spezzamento di $f(X)$ su $\mathbb{F}_2$.

   (d) Determinare tutti gli elementi di $\mathbb{F}_2(\alpha)$ e tutti gli automorfismi del gruppo moltiplicativo $G := \mathbb{F}_2(\alpha)^*$.

   (e) Determinare almeno un automorfismo di G che non si estende a un automorfismo del campo $\mathbb{F}_2(\alpha)$.

6. Consideriamo il polinomio $f(X) := X^3 + X + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$. Sia K un campo di spezzamento di $f(X)$ su $\mathbb{F}_2$ e sia $\alpha \in K$ una radice di $f(X)$.

   (a) Verificare che $K = \mathbb{F}_2(\alpha)$.

   (b) Se L è un campo di spezzamento su $\mathbb{F}_2$ del polinomio

   $$g(X) := X^4 + X^2 + X + 1 \in \mathbb{F}_2[X],$$

   dire perché i campi K ed L sono isomorfi, e determinare esplicitamente un isomorfismo $\varphi : K \to L$.

7. Mostrare che l'applicazione

   $$\Phi : \mathbb{F}_p(X) \longrightarrow \mathbb{F}_p(X)\,; \quad f \mapsto f^p$$

   è un omomorfismo (omomorfismo di Fröbenius), ma non un automorfismo.

8. Determinare il numero dei polinomi di grado 2 irriducibili su $\mathbb{F}_p$.

9. Stabilire se esistono polinomi irriducibili su $\mathbb{F}_3$ di grado 2 o 3 che si spezzano linearmente sul campo con 27 elementi e in caso affermativo determinarne almeno uno.