Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2013/2014
AL310 - Teoria di Galois (prof. Gabelli)
Esercizi 7

1. Stabilire quali tra i seguenti polinomi sono separabili su $\mathbb{Q}; \mathbb{C}; \mathbb{F}_2; \mathbb{F}_3$:
   (a) X^3+1; (b) X^2-2X+1; (c) $6X^2+X+1$; (d) $X^5+X^4+X^3+X^2+X+1$; (e) X^9+X^3+1.

2. Sia K un campo finito con p^n elementi. Mostrare che ogni elemento di K ha un'unica radice p-esima.

3. Scrivere i seguenti polinomi simmetrici di $\mathbb{Z}[X_1, X_2, X_3]$ come polinomi valutati nelle funzioni simmetriche elementari:
$$X_1^3 + X_2^3 + X_3^3, \quad X_1^2X_2 + X_1^2X_3 + X_2^2X_1 + X_2^2X_3 + X_3^2X_1 + X_3^2X_2.$$

4. (*Determinante di Vandermonde*). Sia $A[X_1, \dots, X_n]$ l'anello dei polinomi in n indeterminate a cofficienti nel dominio A. Data la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ X_1 & X_2 & \dots & X_n \\ X_1^2 & X_2^2 & \dots & X_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_1^{n-1} & X_2^{n-1} & \dots & X_n^{n-1} \end{pmatrix}$$
si indichi con $V(\mathbf{X}) := V(X_1, \dots, X_n)$ il determinante di M. Dimostrare che
$$V(\mathbf{X}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (X_i - X_j)$$
Suggerimento: Si proceda per induzione su n e si usino le operazioni elementari su righe e colonne della matrice.

5. Calcolare il discriminante del polinomio $X^3 + pX + q \in \mathbb{Q}[X]$.

6. Calcolare il discriminante del polinomio $X^4 + bX^2 + c \in \mathbb{Q}[X]$.

7. Calcolare il discriminante del p-esimo polinomio ciclotomico $\Phi_p(X)$. *Suggerimento*: Scrivere $\Phi_p(X) = (X^p - 1)/(X - 1)$ ed usare la formula $D(f) = \prod_i f'(\alpha_i)$.

8. Mostrare che un polinomio su $\mathbb{Q}$ con tutte radici reali ha discriminante positivo.

9. Sia K un campo di spezzamento del polinomio $f(X) \in F[X]$ e sia $D := D(f)$ il discriminante di $f(X)$. Mostrare che se $\delta^2 = D$, allora $F \subseteq F(\delta) \subseteq K$.

10. Sia $K \subseteq \mathbb{C}$ il campo di spezzamento del polinomio $X^3 - 2$. Costruire esplicitamente un isomorfismo tra $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}K$ ed $\mathbf{S_3}$.

11. Sia $K \subseteq \mathbb{C}$ il campo di spezzamento del polinomio $X^4 + 30X^2 + 45$. Costruire esplicitamente un'immersione di $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}K$ in $\mathbf{S_4}$.

12. Sia $K = \mathbb{Q}(\xi)$ il p-esimo ampliamento ciclotomico. Costruire un'immersione di $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}K$ in $\mathbf{S_p}$.

13. Sia $K = \mathbb{Q}(\xi)$ l'ottavo ampliamento ciclotomico. Vedendo K come il campo di spezzamento dei polinomi $X^8 - 1$ e $\Phi_8(X) = X^4 + 1$ rispettivamente, costruire un'immersione di $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}K$ in $\mathbf{S_8}$ e $\mathbf{S_4}$.