Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2013/2014
AL310 - Teoria di Galois (prof. Gabelli)
Esercizi 8

1. In ciascuno dei seguenti casi si calcoli il campo di spezzamento e il gruppo di Galois del polinomio dato:

   (a) $(x^2 + x + 1)(x^3 + x^2 + 1) \in \mathbb{F}_2[x]$;

   (b) $(x^3 + x + 1)(x^6 + x + 1) \in \mathbb{F}_3[x]$;

   (c) $(x^4 + x + 1)(x^4 + x^3 + 1)(x^2 + x + 1)(x^3 + x + 1) \in \mathbb{F}_2[x]$;

   (d) $(x^3 + x + 1)(x^3 + x^2 + 1)(x^9 + x^6 + 1)(x^27 + 2x^9 + 1) \in \mathbb{F}_3[x]$.

2. Determinare il gruppo di Galois dei seguenti polinomi ed un sottogruppo di S_n ad esso isomorfo:

   (a) $x^3 - 5 \in \mathbb{Q}[x]$;

   (b) $(x^2 - 2)(x^3 - 3) \in \mathbb{Q}[x]$;

   (c) $x^3 - 10x^2 - 8x + 64 \in \mathbb{Q}[x]$;

   (d) $f_\alpha \in \mathbb{Q}[x]$ dove f_α è il polinomio minimo di $\alpha = cos(\frac{2\pi}{7})$.

3. Determinare esplicitamente tutti gli automorfismi del campo di spezzamento in $\mathbb{C}$ dei seguenti polinomi:

$$x^5 - 1; \quad x^6 + 3; \quad x^8 - 2$$

   e scriverli come elementi di S_n (n opportuno).

4. Sia $n > 2$ e $f(x) = x^n - 2$. Mostrare che se $M.C.D.(n, \phi(n)) = 1$, allora il gruppo di Galois di $f(x)$ su $\mathbb{Q}$ ha ordine $n\phi(n)$.

5. Sia $\xi_{12} \in \mathbb{C}$.

   (a) Determinare la struttura del gruppo $Gal(\mathbb{Q}(\xi_{12})/\mathbb{Q})$ e il reticolo dei suoi sottogruppi.

   (b) Dimostrare che i campi $F_1 := \mathbb{Q}(i)$, $F_2 := \mathbb{Q}(i\sqrt{3})$, $F_3 := \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ sono contenuti in $\mathbb{Q}(\xi_{12})$.

(c) Per ogni $i \in 1, 2, 3$, determare l'insieme

$$H_i := \{\sigma \in Gal(\mathbb{Q}(\xi_{12})/\mathbb{Q}) : \sigma_{|F_i} = Id_{F_i}\},$$

e mostrare che H_i è un sottogruppo di $Gal(\mathbb{Q}(\xi_{12})/\mathbb{Q})$.

6. Esplicitare la corrispondenza di Galois per il k-esimo ampliamento ciclotomico per $k = 5, 7, 8, 9, 11, 15, 21$.

7. Mostrare che il gruppo di Galois su $\mathbb{Q}$ del polinomio $f(x) = x^4 + x^2 - 1$ è un gruppo diedrale di grado 4. Determinare inoltre tutti i sottocampi normali del campo di spezzamento di $f(x)$.

   Suggerimento: Notare che $\mathbb{Q}(\sqrt{5}, i)$ è contenuto nel campo di spezzamento di $f(x)$.

8. Esplicitare la corrispondenza di Galois per i seguenti polinomi :

$$f(X) = X^4+30X^2+45, \quad g(X) = X^4+2X^2+9, \quad h(X) = X^4-3 \in \mathbb{Q}[X].$$

9. Calcolare il discriminante dei seguenti polinomi $\in \mathbb{Q}[X]$:

   (a) $f(X) = X^2 + a_1X + a_0$;

   (b) $f(X) = X^3 + a_1X + a_0$;

   (c) $f(X) = X^4 + a_2X^2 + a_0$;

   (d) $f(X) = X^4 + a_1X + a_0$.

10. Determinare un ampliamento ciclotomico contenente $\sqrt{d}$, per $d = 3, 6, 11, 12, -15$.