Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2013/2014
AL310 - Teoria di Galois (prof. Gabelli)
Esercizi 9

1. Siano $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt[3]{5})$, $L := \mathbb{Q}(\sqrt{3})$, $M := \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$. Determinare $\mathrm{Gal}_L(K)$, $\mathrm{Gal}_M(K)$ ed i loro campi fissi.

   (Osservare che K non è normale su $\mathbb{Q}$, ma le nozioni di gruppo di Galois e di campo fisso di un sottogruppo sono comunque definite)

2. Determinare gli ampliamenti normali di $\mathbb{Q}$ contenuti nel campo di spezzamento di $X^4 - 3$.

3. Sia $\mathbb{Q} \subseteq K$ un ampliamento di Galois. Mostrare che K è un ampliamento biquadratico di $\mathbb{Q}$ se e soltanto se il suo gruppo di Galois è di Klein.

4. Siano $p_1, \dots, p_n$ numeri primi distinti e sia $K = \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_n})$. Mostrare che K è normale su $\mathbb{Q}$ e determinare il suo gruppo di Galois. Esplicitare inoltre la corrispondenza di Galois per $n = 1, 2, 3$.

5. Sia $f(X) := X^4 + 2X^3 + 2X + 2 \in \mathbb{F}_3[X]$ e sia K un suo campo di spezzamento su $\mathbb{F}_3$. Determinare $\mathrm{Gal}_{\mathbb{F}_3}(K)$ ed esplicitare la corrispondenza di Galois.

6. Sia $d = p_1^{e_1} \dots p_s^{e_s}$, prodotto di primi distinti e $n := 8p_1 \dots p_s$. Mostrare che $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ è contenuto nell'n-simo ampliamento ciclotomico.

7. Mostrare che $\mathbb{Q}(\xi_{15})$ ha esattamente due sottocampi reali. Determinarli e fornire per essi un elemento primitivo.

8. Determinare il gruppo di Galois su $\mathbb{Q}$ del polinomio $X^8 - 9$.

9. Sia p un numero primo congruo a 1 modulo n. Mostrare che il p-esimo ampliamento ciclotomico di $\mathbb{Q}$ contiene un ampliamento con gruppo di Galois ciclico di ordine n.

10. Sia $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ un polinomio irriducibile il cui gruppo di Galois sia ciclico di ordine 5. Si dimostri che $f(X)$ ha grado 5 e tutte radici reali.

11. Costruire un ampliamento di Galois di $\mathbb{Q}$ con gruppo di Galois ciclico di ordine 5.

12. Determinare un polinomio di quinto grado irriducibile su $\mathbb{Q}$ che ha tutte radici reali.

13. Costruire un polinomio di quinto grado irriducibile su $\mathbb{Q}$ che ha esattamente 3 radici reali.

14. Mostrare che il gruppo di Galois del polinomio $f(X) := X^5 - 6X + 3$ è isomorfo a $\mathbf{S}_5$. Stabilire se $f(X)$ è risolubile per radicali.