Università degli studi Roma Tre
Corso di laurea in Matematica - A.A. 2014-2015
AL310 - Istituzioni di Algebra Superiore
Appello A
14 Gennaio 2015

Esercizio 1.
Dimostrare che l'applicazione

$$\varphi : \mathbb{Q}(\pi) \longrightarrow \mathbb{Q}(\pi)\,; \quad f(\pi) \mapsto f(\pi^{-1})$$

è un automorfismo.
(a) Determinare il campo fisso $K := \mathbb{Q}(\pi)^{\varphi}$.
(b) Calcolare i gradi $[\mathbb{Q}(\pi) : K]$ e $[K : \mathbb{Q}]$.

Esercizio 2. Siano dati $\alpha := \sqrt[3]{2}$, $\zeta := \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ e $\beta := \alpha\zeta$.
(a) (*Facoltativo*) Provare che per ogni $c \in \mathbb{Q}$, il numero $\gamma := \alpha + c\beta$ è radice di un polinomio a coefficienti razionali di sesto grado della forma $x^6 + ax^3 + b$.
(b) Provare che il polinomio minimo di $\alpha + \beta$ è di terzo grado.
(c) Dimostrare che $\alpha - \beta$ ha grado 6 su $\mathbb{Q}$.

Esercizio 3. Siano dati in $\mathbb{F}_5[x]$ i polinomi

$$f(x) = x^2 + 2 \qquad\qquad g(x) = x^4 + x^3 + 4x^2 + 3x + 3.$$

Siano poi L ed M rispettivamente i campi di spezzamento di $f(x)$ e $g(x)$ su $\mathbb{F}_5$.
(a) Fattorizzare $g(x)$ su $\mathbb{F}_5$ e dedurre che M ha venticinque elementi.
(b) Mostrare che $g(x)$ si spezza linearmente su L determinando esplicitamente le sue radici in L .
(c) Costruire, se possibile, un isomorfismo $\psi : M \to L$.

Esercizio 4. Si consideri il polinomio

$$f(X) = X^4 - 8X^2 - 2 \in \mathbb{Q}[X].$$

e sia K il suo campo di spezzamento in $\mathbb{C}$.
(a) Dimostrare che $\mathfrak{Gal}_{\mathbb{Q}}(K)$ è un gruppo diedrale.
(b) Determinare tutti i sottocampi di K normali su $\mathbb{Q}$.

Esercizio 5. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ di grado 4 su $\mathbb{Q}$. Dimostrare che α è costruibile se e soltanto se il polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}$ è biquadratico.

Esercizio 6. Siano $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$ un polinomio monico di grado $n \geq 2$ e p un numero primo. Si indichi con $\bar{f}(X)$ il polinomio di $\mathbb{F}_p[X]$ che si ottiene a partire da $f(X)$ quozientando i suoi coefficienti modulo p.
(a) Dimostrare che se il gruppo di Galois G di $\bar{f}(X)$ su $\mathbb{F}_p$ è isomorfo ad un sottogruppo transitivo di S_n, allora anche il gruppo di Galois H di $f(X)$ su $\mathbb{Q}$ è isomorfo ad un sottogruppo transitivo di S_n.
(b) Spiegare perchè, anche quando sono entrambi transitivi, G ed H possono non essere isomorfi e costruire un esempio esplicito.