Università degli studi Roma Tre
Corso di laurea in Matematica - A.A. 2014-2015
AL310 - Istituzioni di Algebra Superiore
Appello B
6 Febbraio 2015

Esercizio 1. Sia X una indeterminata su $\mathbb{C}$.
(a) Si dimostri che $iX \in \mathbb{C}(X)$ è algebrico su $\mathbb{Q}(X)$.
(b) Si determini il polinomio minimo di iX su $\mathbb{Q}(X)$ e si costruisca il suo campo di spezzamento.

Esercizio 2. Sia

$$f(X) = X^4 + \sqrt{2}X^2 - \sqrt{3}X + 1 \in \mathbb{R}[X]$$

e siano $\alpha, \beta, \gamma, \eta \in \mathbb{C}$ le sue radici. Si dimostri che:

$$\frac{\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \eta^3}{\sqrt{6}(\alpha\beta\gamma\eta)} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}).$$

Esercizio 3. Sia ξ una radice primitiva settima dell'unità.
(a) Determinare tutti i sottocampi F tali che $\mathbb{Q} \subseteq F \subseteq \mathbb{Q}(\xi)$ e stabilire quali di essi sono reali.
(b) Per ogni tale campo F, determinare $\beta = f(\xi) \in \mathbb{Q}(\xi)$ tale che $F = \mathbb{Q}(\beta)$ e trovare il polinomio minimo di ξ su F.

Esercizio 4. Siano $f(X) := X^2 + X + 2$, $g(X) := X^4 + X^2 + 2 \in \mathbb{F}_3[X]$.

(a) Mostrare che $f(X)$, g(X) sono irriducibili su $\mathbb{F}_3$.

(b) Data una radice α di $f(X)$ e una radice β di $g(X)$, costruire i campi $F = \mathbb{F}_3(\alpha)$ e $K = \mathbb{F}_3(\beta)$.

(c) Mostrare che $F \subseteq K$ e fattorizzare $g(X)$ su F.

(d) Costruire gli automorfismi di K estendendo gli automorfismi di F.

Esercizio 5. Sia $\mathbb{Q} \subseteq K$ un ampliamento normale di grado $2p$, $p \geq 3$ primo. Mostrare che:
(a) K contiene un ampliamento quadratico di $\mathbb{Q}$ ed un ampliamento di grado p su $\mathbb{Q}$.
(b) $Gal_{\mathbb{Q}}(K)$ è isomorfo ad un prodotto *semi*diretto di $\mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{Z}_p$.
(c) Se $Gal_{\mathbb{Q}}(K)$ è abeliano, allora $Gal_{\mathbb{Q}}(K)$ è ciclico.