Università degli studi Roma Tre
Corso di laurea in Matematica - A.A. 2014-2015
AL310 - Istituzioni di Algebra Superiore
Appello C
11 Giugno 2015

Esercizio 1. Sia $\zeta := \zeta_{15} \in \mathbb{C}$ una radice quindicesima primitiva dell'unità e sia $K := \mathbb{Q}(\zeta)$.

(i) Dimostrare che K contiene un unico ampliamento biquadratico L di $\mathbb{Q}$.

(ii) Determinare un elemento primitivo per L su $\mathbb{Q}$.

(iii) Determinare i sottocampi reali di K ed un loro elemento primitivo.

(iv) Stabilire se esiste un sottocampo M di K tale che $[M : \mathbb{Q}] = 5$.

Esercizio 2. Si consideri il polinomio

$$f(x) = x(x^4 + x + 2)^{100}(x^9 - x^3)^3(x^{54} + 1)^2 \in \mathbb{F}_3[x]$$

e sia K un campo di spezzamento di $f(x)$ su $\mathbb{F}_3$.

(i) Determinare i fattori irriducibili di $f(x)$.

(ii) Determinare la cardinalità di K.

(iii) Determinare il numero dei sottocampi di K.

(iv) Stabilire se il polinomio $x^2 + 1 \in \mathbb{F}_3[x]$ ha una radice in K.

Esercizio 3. Si consideri il polinomio

$$f(x) = \frac{3}{4}x^5 - 6x^2 + 3x + \frac{3}{2} \in \mathbb{Q}[x].$$

(i) Dimostrare che $f(x)$ ammette esattamente tre radici reali, di cui una sola negativa.

(ii) Sia η la radice reale negativa di $f(x)$. Stabilire se $\eta^2 - 3$ è un numero costruibile.

(iii) Determinare il gruppo di Galois di $f(x)$ su $\mathbb{Q}$ e stabilire se $f(x)$ è risolubile per radicali.

Esercizio 4. Sia $\alpha := \sqrt[3]{1 + \sqrt{2} + \sqrt{5}}$ e sia $K := \mathbb{Q}(\alpha)$.

(i) Mostrare che K contiene il campo di spezzamento L del polinomio

$$f(x) := x^4 - 14x^2 + 9 \in \mathbb{Q}[x].$$

(ii) Determinare le immersioni di K in $\mathbb{C}$ che estendono l'identità su L e stabilire quali di queste immersioni sono automorfismi di K.

Esercizio 5. Stabilire se un polinomio irriducibile di quarto grado può avere gruppo di Galois isomorfo a $\mathbf{S}_3$.