Università degli studi Roma Tre
Corso di laurea in Matematica A.A. 2014-2015
AL310 - Istituzioni di Algebra Superiore
Prima prova di valutazione in itinere
3 Novembre 2014

Esercizio 1. Sia
$$f(x) := \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \in \mathbb{Q}[x]$$
e sia $\gamma \in \mathbb{C}$ una sua radice.

(i) Stabilire se gli anelli $\frac{\mathbb{Q}[x]}{(f(x))}$, $\frac{\mathbb{R}[x]}{(f(x))}$ e $\frac{\mathbb{C}[x]}{(f(x))}$ sono campi.

(ii) Dimostrare, senza fare i conti, che il polinomio $f(x)$ è irriducibile su $\mathbb{Q}(i)$.

(iii) Fattorizzare il polinomio $g(x) := 9f(x)$ su $\mathbb{Z}$.

(iv) Dimostrare, senza fare i conti, che $\mathbb{Q}(\gamma) = \mathbb{Q}(\gamma^2)$.

Esercizio 2. Sia y un'indeterminata su $\mathbb{Q}$.

(i) Stabilire se $\mathbb{Q}(\pi)$ e $\mathbb{Q}(y)$ sono isomorfi.

Sia poi
$$\alpha := \frac{\pi^2}{\pi + 1} \in \mathbb{Q}(\pi).$$

(ii) Provare che α è trascendente su $\mathbb{Q}$ e che π è algebrico $\mathbb{Q}(\alpha)$.

(iii) Determinare $[\mathbb{Q}(\pi) : \mathbb{Q}(\alpha)]$.

Esercizio 3. Si consideri il polinomio
$$f(x) = (x^4 + 4x^2 + 2x)(x^2 + 1) \in \mathbb{F}_5[x].$$

(i) Fattorizzare $f(x)$ su $\mathbb{F}_5$.

(ii) Costruire un'estensione K di $\mathbb{F}_5$ che sia campo di spezzamento per $f(x)$ su $\mathbb{F}_5$ ed esplicitare le radici di $f(x)$ in K.

(iii) Calcolare $[K : \mathbb{F}_5]$ e la cardinalità di K.

(iv) Determinare il gruppo degli automorfismi di K e la sua struttura.

Esercizio 4. Sia $p \geq 3$ un numero primo e sia $\rho \neq -1$ una radice p-esima complessa di -1.

(i) Dimostrare che $\mathbb{Q}(\rho) = \mathbb{Q}(\zeta_{2p})$, dove $\zeta_{2p} \in \mathbb{C}$ è una radice $2p$-esima primitiva dell'unità.

(ii) Per $p = 5$, calcolare il polinomio minimo di ρ su $\mathbb{Q}$.

(iii) Per $p = 5$, determinare esplicitamente il gruppo degli automorfismi di $\mathbb{Q}(\rho)$ e dire qual è la sua struttura.

Esercizio 5. Determinare il grado e tutte le radici in $\mathbb{C}$ del polinomio minimo su $\mathbb{Q}$ di $\alpha := \sqrt{\sqrt{3} + i\sqrt[4]{3}}$.