Università degli studi Roma Tre
Corso di laurea in Matematica - A.A. 2014-2015
AL310 - Istituzioni di Algebra Superiore
Seconda prova di valutazione in itinere
8 Gennaio 2015

Esercizio 1. Si consideri il polinomio

$$f(X) = X^4 + X^3 - 5X - 5 \in \mathbb{Q}[X].$$

(a) Determinare il gruppo di Galois di $f(X)$ su $\mathbb{Q}$ e la sua struttura come gruppo astratto.

(b) Esplicitare la corrispondenza di Galois per il polinomio $f(X)$ su $\mathbb{Q}$.

Esercizio 2. (a) Determinare un'estensione ciclotomica K di $\mathbb{Q}$ che contiene $\sqrt{3}$.

(b) Determinare la struttura di $\mathfrak{Gal}_{\mathbb{Q}}(K)$ come gruppo astratto.

Esercizio 3. (a) Stabilire quanti sono i polinomi irriducibili di grado sei su $\mathbb{F}_2$.

(b) Costruire il campo $\mathbb{F}_{64}$, determinare tutti i suoi sottocampi e per ciascuno di essi trovare un elemento primitivo.

(c) Esplicitare la corrispondenza di Galois per l'estensione $\mathbb{F}_2 \subset \mathbb{F}_{64}$.

Esercizio 4. Si consideri il polinomio

$$f(X) = 2X^5 + 30X^2 + 10X - 10 \in \mathbb{Q}[X].$$

(a) Stabilire se il gruppo di Galois di $f(X)$ su $\mathbb{Q}$ è transitivo.

(b) Dimostrare che l'equazione polinomiale $f(X) = 0$ non è risolubile per mezzo di radicali.

(c) Detta $\alpha \in \mathbb{C}$ una radice di $f(X)$, stabilire se α è un numero costruibile.

Esercizio 5. Sia $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ un polinomio di grado p con gruppo di Galois isomorfo a $\mathbb{Z}_p$, $p \geq 3$ primo. Dimostrare che:

(a) $f(X)$ è irriducibile.

(b) Le radici di $f(X)$ sono tutte reali.