Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AL310

7 Ottobre 2014

A.A. 2014-2015 - Docente: Prof.ssa Stefania Gabelli

Tutori: Federico Campanini e Giovan Battista Pignatti

TUTORATO 1

1. Sia $f(X) = X^3 + X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ e siano $\rho \in \mathbb{R}$, σ e τ le sue radici. Mostrare che $\sigma + \tau = -\rho$ e che $\sigma\tau = \rho^{-1}$.

2. Trova il polinomio minimo dei seguenti elementi:
   - $\sqrt{2} + i$ su $\mathbb{Q}$;
   - $\sqrt{2} + i$ su $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$;
   - $\sqrt{5 + \sqrt{5}}$ su $\mathbb{Q}$;
   - $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ su $\mathbb{Q}$;
   - $\sqrt[3]{2} + \sqrt{2}$ su $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$;
   - $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ su $\mathbb{Q}(\sqrt{10})$;
   - ξ_8 su $\mathbb{Q}(i)$;
   - $i\sqrt[4]{5}$ su $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(i)$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5})$, $\mathbb{C}$ e $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.
   - $\frac{1}{\pi}$ su $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}(\pi^3)$;
   - $\sqrt[3]{2 + \sqrt{3 - \sqrt{2}}}$ su $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{3 - \sqrt{2}})$, $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}$.

3. Determinare il polinomio minimo di β su $\mathbb{Q}$ con:
   - $\beta = \alpha + 1$, dove $\alpha^3 - 3\alpha^2 + 15 = 0$;
   - $\beta = \alpha^2$, dove $\alpha^5 - 6\alpha^4 + 4\alpha^2 - 2 = 0$.

4. Mostrare che:
   - $\mathbb{Q}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{6}) = \mathbb{Q}(\sqrt{3} + \sqrt{6})$;
   - $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3})$;
   - $\mathbb{Q}(\sqrt{2}i) \subsetneq \mathbb{Q}(\sqrt{2} + i)$;
   - $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}, i) = \mathbb{Q}(i\sqrt[3]{5}) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5} + i)$;
   - $\mathbb{Q}(\pi, \pi^2) = \mathbb{Q}\left(\frac{1}{\pi}\right) = \mathbb{Q}\left(\pi - \frac{1}{3}\right)$.

5. Sia $f(X) = X^7 - X + 1 \in \mathbb{F}_7[X]$.

   a. Verificare che f non ha radici in $\mathbb{F}_7$.

   b. Provare che, se α è una radice di f, tutte le radici sono del tipo $\alpha + b$ al variare di $b \in \mathbb{F}_7$.

   c. Dimostrare che f è irriducibile.

6. Trovare due basi per i seguenti campi visti come $\mathbb{Q}$-spazi vettoriali.
   - $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$;
   - $\mathbb{Q}(\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7})$;
   - $\mathbb{Q}(e, \sqrt{7})$;
   - $\mathbb{Q}(i - \sqrt{5})$.