Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AL310

14 Ottobre 2014

A.A. 2014-2015 - Docente: Prof.ssa Stefania Gabelli

Tutori: Federico Campanini e Giovan Battista Pignatti

TUTORATO 2

1. Siano $F \subseteq L_1$ e $F \subseteq L_2$ due ampliamenti di campi tali che $n := [L_1 : F]$ e $m := [L_2 : F]$, con (n,m)=1. Mostrare che:

   (i) $[L_1 \cap L_2 : F] = 1$

   (ii) $[< L_1 \cup L_2 >: F] = n \cdot m$

2. Sia $F \subseteq K$ un ampliamento di campi con $[K : F] = 385$. Sia poi $F \subsetneq L \subsetneq K$ un campo intermedio. Mostrare che le seguenti condizioni non possono essere soddisfatte contemporaneamente:

   (i) Esiste un campo H_1 tale che $F \subsetneq H_1 \subsetneq L$

   (ii) Esiste un campo H_2 tale che $L \subsetneq H_2 \subsetneq K$

3. Sia $\mathbb{Q} \subseteq K$ un ampliamento di campi tale che $[K : \mathbb{Q}] = 10$. Spiegare perchè $\sqrt[3]{2} \notin K$.

4. Sia $F \subseteq K$ un ampliamento di campi. Siano L, M due campi intermedi e sia $LM :=< L \cup M >\subseteq K$. Mostrare che:

   (i) se L è algebrico su F allora LM è algebrico su M

   (ii) se L e M sono algebrici su F allora LM è algebrico su F

   (LM è detto COMPOSTO di L e M ed è un ampliamento di F in K)

5. Si consideri il numero reale $\alpha := \sqrt{5 + \sqrt{5}}$.

   (i) Si determini il grado di α su $\mathbb{Q}$ e su $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$

   (ii) Si stabilisca se tutte le radici del polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}$ sono elementi di $\mathbb{Q}(\alpha)$.

   (**Suggerimento**: si verifichi preliminarmente che $\mathbb{Q}(\sqrt{5}) \subseteq \mathbb{Q}(\alpha)$)

   (iii) Si trovino le componenti di $\sqrt{5}$ e $\frac{1}{\sqrt{5}}$ rispetto a una opportuna base di $\mathbb{Q}(\alpha)$ su $\mathbb{Q}$

   (iv) Qual è il grado del polinomio minimo di $\frac{1}{1+\alpha}$ su $\mathbb{Q}$?

   (v) Sia λ una soluzione dell'equazione

   $$T^{2012} + \frac{1}{1+\alpha}T^3 + \alpha^2 T^2 + \alpha T + \sqrt[5]{5} = 0$$

   Dopo aver spiegato perchè λ é algebrico su $\mathbb{Q}$, si dimostri che il suo polinomio minimo su $\mathbb{Q}$ ha grado ≤ 40240

6. Sia F un campo. Si consideri il polinomio

   $$f(X) = f_1(X)^{m_1} \cdot f_2(X)^{m_2} \cdot ... \cdot f_s(X)^{m_s} \in F[X]$$

decomposto canonicamente nel prodotto dei polinomi irriducibili $f_i(X) \in F[X]$. Dimostrare che $f(X)$ ed $f_{rid}(X) := f_1(X) \cdot f_2(X) \cdot ... \cdot f_s(X)$ hanno lo stesso campo di spezzamento su F. Sia poi

$$g(X) := f_1(X)^{n_1} \cdot f_2(X)^{n_2} \cdot ... \cdot f_s(X)^{n_s}$$

scelti come si voglia gli interi $n_1, n_2, ..., n_s \geq 1$. Provare che $f(X)$ e $g(X)$ hanno lo stesso campo di spezzamento su F.

7. Determinare il campo di spezzamento in $\mathbb{C}$ dei seguenti polinomi su $\mathbb{Q}$. Inoltre, determinare il grado su $\mathbb{Q}$ di ciascuno dei campi trovati:

   - $X^4 - 4X^2 + 2$;
   - $X^3 - 1$;
   - $X^4 - 2$;
   - $X^4 - 9X^2 + 20$;
   - $X^5 - 3X^3 + 3X^2 - 9$.

8. Determinare per ciascuno dei seguenti polinomi di $\mathbb{F}_p[X]$ un campo di spezzamento su $\mathbb{F}_p$, per i valori di p a fianco indicati.Inoltre, determinare il grado su $\mathbb{F}_p$ di ciascuno dei campi di spezzamento trovati.

   - $X^3 + 2X + 1$, p=3;
   - $X^3 + 2X + 1$, p=5;
   - $X^4 + 5$, p=2;
   - $X^4 + 5$, p=5;
   - $X^4 + 5$, p=7.