Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AL310

21 Ottobre 2014

A.A. 2014-2015 - Docente: Prof.ssa Stefania Gabelli

Tutori: Federico Campanini e Giovan Battista Pignatti

Tutorato 3

1. Determinare un elemento primitivo per i seguenti ampliamenti di $\mathbb{Q}$:
   (a) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$
   (b) $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, \sqrt[5]{6})$
   (c) $\mathbb{Q}(\xi_3, \xi_7)$
   (d) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})$
   (e) $\mathbb{Q}(\xi_8, \sqrt{7})$
   (f) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \xi_3\sqrt[3]{2})$
2. Mostrare che i polinomi $X^4 - 9$ e $X^4 - 2X^2 - 3$ hanno lo stesso campo di spezzamento su $\mathbb{C}$.
3. Sia $f(X)$ un polinomio monico a coefficienti numerici e siano $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ le sue radici complesse. Mostrare che il campo $\mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ contiene i coefficienti di $f(X)$. Qual'è il campo di spezzamento di $f(X)$ sul suo campo di definizione?
4. Sia F un campo numerico e $f(X), g(X) \in F[X]$. Siano L e M i campi di spezzamento su F di $f(X)$ e $g(X)$ rispettivamente. Mostrare che il composto LM è il campo di spezzamento su F del polinomio $f(X)g(X)$.
5. Dimostrare che se $m, n \geq 1$ sono tali che $m|n$ allora $\mathbb{Q}(\xi_m) \subseteq \mathbb{Q}(\xi_n)$.
6. Dimostrare che per ogni $n \geq 1$ $\mathbb{Q}(\xi_n) \subseteq \mathbb{Q}(\xi_{2n})$. Dimostrare che $\mathbb{Q}(\xi_3) = \mathbb{Q}(\xi_6)$. Esplicitare $\mathbb{Q}(\xi_4)$ e $\mathbb{Q}(\xi_8)$. Dedurre che sebbene $\mathbb{Q}(\xi_n) \subseteq \mathbb{Q}(\xi_{2n})$, tuttavia in generale non vale l'inclusione contraria.
7. Sia F un campo infinito e $K := F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ un ampliamento finito di F. Mostrare che il Teorema dell'Elemento Primitivo vale anche nel caso in cui solo $n - 1$ elementi tra $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sono separabili.