Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AL310

28 Ottobre 2014

A.A. 2014-2015 - Docente: Prof.ssa Stefania Gabelli

Tutori: Federico Campanini e Giovan Battista Pignatti

Tutorato 4

1. Sia $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ e K un campo di spezzamento in $\mathbb{C}$ di f(X) su $\mathbb{Q}$. Trovare tutti i $\mathbb{Q}$-isomorfismi di K in $\mathbb{C}$ e verificare che sono $\mathbb{Q}$-automorfismi con f(X) uguale a:
   (a) $X^4 - X^2 + 2$
   (b) $X^4 + 5X^2 + 5$
   (c) $X^4 - 2X^2 + 3$

   Determinare inoltre la struttura del gruppo di Galois di K su $\mathbb{Q}$.

2. Sia $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ uno dei polinomi dell'Esercizio (1) e sia $\alpha \in K$ una radice di f(X). Stabilire in quali casi $\mathbb{Q}(\alpha) = K$.

3. Determinare tutti le $\mathbb{Q}$-immersioni in $\mathbb{C}$ de seguenti campi e stabilire quali di essi sono $\mathbb{Q}$-automorfismi:
   (a) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$
   (b) $\mathbb{Q}(i\sqrt{3}, i)$
   (c) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[5]{3})$
   (d) $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{\sqrt{2} - \sqrt{3}})$

4. Siano $F \subseteq K$ e $F \subseteq K'$ ampliamenti di campi. Mostrare che un F-isomorfismo è un'applicazione F-lineare.

5. Sia K un campo con sottocampo fondamentale $\mathbb{F}$. Mostrare che un automorfismo $\phi : K \to K$ è l'identità su $\mathbb{F}$ (cioè $\phi(x) = x \ \forall x \in \mathbb{F}$).