Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AL310

25 Novembre 2014

A.A. 2014-2015 - Docente: Prof.ssa Stefania Gabelli

Tutori: Federico Campanini e Giovan Battista Pignatti

TUTORATO 5

1. Calcolare il campo fissato dall'automorfismo di $\mathbb{Q}(\pi)$ che manda π in $-\pi$ e quello fissato dall'automorfismo di $\mathbb{Q}(e)$ che manda e in e^2.

2. Calcolare il discriminante del p-esimo polinomio ciclotomico $\Phi_p(X)$.

3. Sia $f(X) \in \mathbb{R}[X]$ un polinomio di quarto grado. Dimostrare che:

   i) $D(f) = 0$ se e solo se $f(X)$ ha due radici coincidenti;

   ii) $D(f) > 0$ se e solo se $f(X)$ ha radici semplici, tutte reali o tutte complesse;

   iii) $D(f) < 0$ se e solo se $f(x)$ ha radici semplici di cui due reali e due complesse.

4. Dimostrare che $\mathbb{Q}(\xi_n)$ ammette sempre un sottocampo quadratico.

   Dire per quali valori di n si ha che $\mathbb{Q}(\xi_n)$ contiene un'estensione di grado 3 su $\mathbb{Q}$.

   Sia ora p un numero primo. Dire per quali valori di n il campo $\mathbb{Q}(\xi_n)$ contiene un'estensione di grado p su $\mathbb{Q}$.

5. Determinare il gruppo di Galois su $\mathbb{Q}$ dei seguenti polinomi:

$$(X^3 - 2)(X^3 - 1); \quad X^4 + X^2 + 1; \quad (X^4 - 5)(X^2 + 1).$$

6. Sia τ un'indeterminata sul campo $\mathbb{F}_2$ e sia $F := \mathbb{F}_2(\tau^2)$. Mostrare che il polinomio $m(X) := X^4 + \tau^2 X^2 + \tau^2$ è non separabile e irriducibile su F.

7. Mostrare che un campo finito non può avere ampliamenti biquadratici.

8. Determinare tutti gli ampliamenti quadratici contenuti nel 31-esimo ampliamento ciclotomico di $\mathbb{Q}$.