Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AL310

10 Dicembre 2014

A.A. 2014-2015 - Docente: Prof.ssa Stefania Gabelli

Tutori: Federico Campanini e Giovan Battista Pignatti

TUTORATO 6

1.
   - Determinare il gruppo di Galois del campo di spezzamento K di $X^6 - 2$ su $\mathbb{Q}$ in S_6.
   - Trovare un sottocampo F di K normale su $\mathbb{Q}$ che abbia su di esso grado 6 e descrivere il suo gruppo di Galois.
   - Verificare che $\sqrt{2} \in K \setminus F$
   - Dedurne che $D_6 \simeq S_3 \times \mathbb{Z}_2$.

2. Siano $p_1, \cdots, p_n$ i primi n numeri primi e sia $K := \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \cdots, \sqrt{p_n})$. Mostrare che l'ampliamento $\mathbb{Q} \subseteq K$ è di Galois e determinare il suo gruppo di Galois. Esplicitare inoltre la corrispondenza di Galois per n=1,2,3.

3. Siano $\omega \in \mathbb{C}$ una radice terza primitiva dell'unità e $K := \mathbb{Q}(\omega, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3})$.
   - Si verifichi che $[K : \mathbb{Q}] = 12$.
   - Si mostri che K è un ampliamento normale di $\mathbb{Q}$.
   - Si determini la struttura del gruppo $Gal(K/\mathbb{Q}(\sqrt{2}))$, si dica se è risolubile e in caso positivo se ne esibisca una serie risolvente.
   - Si illustri la corrispondenza di Galois per l'ampliamento $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subseteq K$ e si trovino i campi intermedi F tra $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ e K tali che F è normale su $\mathbb{Q}$.
   - Si identifichi $Gal(K/\mathbb{Q})$ con un prodotto diretto di gruppi noti.

4. Mostrare che, se $c > 0$, il gruppo di Galois del polinomio $f(X) = X^3 + cX + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ è isomorfo ad S_3. Esplicitare un tale isomorfismo.

5. Sia $K \subseteq L$ un ampliamento finito separabile di grado d. Mostrare che il numero di campi intermedi tra K e L è al più $2^{d!}$.

6. Esplicitare la corrispondenza di Galois per il seguente polinomio:

$$X^4 + 8X^2 + 8$$