Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AL310

17 Dicembre 2014

A.A. 2014-2015 - Docente: Prof.ssa Stefania Gabelli

Tutori: Federico Campanini e Giovan Battista Pignatti

Tutorato 7

1. Dimostrare che per n dispari il numero $\sqrt[n]{2}$ non è costruibile.

2. Stabilire se è possibile costruire un quadrato equivalente alla superficie di una sfera data.

3. Costruire le radici di un polinomio biquadratico a coefficienti razionali.

4. Mostrare che è sempre possibile bisecare un angolo con riga e compasso.

5. Un alieno che vive in uno spazio n-dimensionale vuole duplicare l'ipercubo con riga e compasso. Per quali valori di n lo può fare?

6. Mostrare che se $\alpha \in \mathbb{C}$ ha grado 4 su $\mathbb{Q}$ e α non è radice di un polinomio biquadratico allora α non è costruibile.

And now, ladies and gentlemen... un po' di ripasso in vista del secondo esonero

7. Siano

$$f(x) := 2x^4 + 12x^2 + 4 \in \mathbb{Q}[x]$$

ed α una radice di f(x) in $\mathbb{C}$.

- Stabilire se f(x) è irriducibile su $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.
- Verificare che $\frac{2}{3}\sqrt{7} \in \mathbb{Q}(\alpha)$.
- Determinare le $\mathbb{Q}$-immersioni di $\mathbb{Q}(\alpha)$ in $\mathbb{C}$, estendendo le $\mathbb{Q}$-immersioni di $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$ in $\mathbb{C}$. Quali tra queste sono $\mathbb{Q}$-automorfismi di $\mathbb{Q}(\alpha)$?

8. Sia dato

$$f(x) := x^5 + 7x^2 - 7x - 7 \in \mathbb{Q}[x]$$

- Spiegare perchè $\mathfrak{Gal}_{\mathbb{Q}}(f(x)) \simeq S_5$.
- Stabilire se l'equazione $f(x) = 0$ è risolubile per radicali.
- Detta ρ una radice reale di $f(x)$, dire se il punto $(0, \rho^2)$ è costruibile.

9. Si risolvano i seguenti punti:

- Costruire $\mathbb{F}_{16}$, il campo con 16 elementi.
- Per ogni campo intermedio $\mathbb{F}_2 \subsetneq L \subsetneq \mathbb{F}_{16}$, determinare $\alpha \in L$ e $\beta \in \mathbb{F}_{16}$ tali che $L = \mathbb{F}_2(\alpha)$ e $\mathbb{F}_{16} = L(\beta)$.

- Fissati α e β come sopra, calcolare il polinomio minimo di α su $\mathbb{F}_2$ ed il polinomio minimo di β su L.
- Calcolare esplicitamente $\mathfrak{Gal}_{\mathbb{F}_2}(\mathbb{F}_2(\alpha,\beta))$ e determinare la sua struttura.
- Illustrare la corrispondenza di Galois per l'estensione $\mathbb{F}_2 \subseteq \mathbb{F}_{16}$.
- Esibire, se esiste, un polinomio di quarto grado a coefficienti in $\mathbb{F}_2$ irriducibile su $\mathbb{F}_2(\alpha,\beta)$.

10. Sia dato:

$$f(x) := x^5 - 3x^2 - x^4 + 3x \in \mathbb{Q}[x]$$

e sia K il campo di spezzamento di $f(x)$ in $\mathbb{C}$.

- Stabilire se $\mathfrak{Gal}_{\mathbb{Q}}(K)$ è (a meno di isomorfismi) un sottogruppo transitivo di S_5.
- Determinare $\mathfrak{Gal}_{\mathbb{Q}}(K)$ e la sua struttura.
- Esplicitare la corrispondenza di Galois per l'estensione $\mathbb{Q} \subseteq K$.

11. Siano ϵ ed $\omega := \frac{-1+\sqrt{5}}{4} + i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ rispettivamente una radice complessa primitiva terza e quinta dell'unità.

- Dimostrare che $\xi := \epsilon\omega$ è una radice quindicesima dell'unità e che $\mathbb{Q}(\epsilon,\omega) = \mathbb{Q}(\xi)$.
- Determinare i sottocampi di $\mathbb{Q}(\xi)$ che hanno grado 2 su $\mathbb{Q}$ e stabilire se sono reali.
- Determinare il polinomio minimo di $\xi + \xi^4$ su $\mathbb{Q}(\epsilon)$.
- Mostrare che $\mathbb{Q}(\xi + \xi^4)$ è un ampliamento biquadratico di $\mathbb{Q}$.