Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2014/2015
AL310 - Teoria di Galois (prof. Gabelli)
Esercizi 1

1. Sia F un campo reale oppure $F = \mathbf{F}_p$ con $p \equiv 3 \bmod (4)$. Mostrare che l'insieme delle matrici

$$\mathcal{M}_{a,b} = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \; ; \, a, b \in F\}$$

   è un campo, sottoanello dell'anello delle matrici quadrate di dimensione 2 a coefficienti in F.

   Se $F = \mathbf{F}_p$, quanti elementi ha $\mathcal{M}_{a,b}$?

2. Dire quale dei seguenti insiemi sono campi e quali no, giustificando la risposta:

   (a) $\mathbb{Q}[X]/(x^5+1)$

   (b) $\mathbb{Q}[X]/(x^5+2)$

   (c) $\mathbb{F}_5[X]/(x^2+1)$

   (d) $\mathbb{Z}[X]/(x^3+x+1)$

   (e) $\mathbb{Q}(\sqrt{3})[X]/(x^2-3)$

3. Costruire esplicitamente i campi $\mathbb{Q}(\alpha)$ per i seguenti valori di α:

$$\sqrt[5]{2}\,, \quad \sqrt{3}+2i\,, \quad ln(2).$$

4. Costruire esplicitamente i campi:

$$\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})\,, \quad \mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{5}+2i)\,, \quad \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3})\,, \quad \mathbb{Q}(\pi, 2+i).$$

5. Siano a, b due interi positivi. Mostrare che

$$\mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b}) = \mathbb{Q}(x\sqrt{a} + y\sqrt{b}),$$

   per ogni x, $y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

6. Siano $m, n \geq 2$ due interi coprimi. Mostrare che
$$\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2},\ \sqrt[m]{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt[n]{2}\,\sqrt[m]{3}).$$

7. Mostrare che, per ogni $m, n \geq 2$,
$$\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2},\ \sqrt[m]{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt[r]{2}),$$
per un opportuno $r \geq 2$.

8. Sia $\alpha := \sqrt[4]{3}$ e $K := \mathbb{Q}(\alpha)$.
   (a) Determinare il polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}$.
   (b) Verificare che $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \subseteq K$ e determinare il polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.
   (c) Posto $\beta := \sqrt{3}+\sqrt[4]{27}-2$, dire perché $\beta \in K$, determinare l'inverso razionalizzato di β in K e il polinomio minimo di β su $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

9. Sia $K := \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})$.
   (a) Dimostrare che non esistono elementi $a, b \in \mathbb{Q}$ tali che $(a+b\sqrt{2})^2 = 5$.
   (b) Calcolare il grado di $\sqrt{5}$ su $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ e il grado di $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ su $\mathbb{Q}$.
   (c) Dimostrare che $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{5})$.

10. Sia $\alpha \in \mathbb{C}$ algebrico di grado n su $\mathbb{Q}$ e sia $\varphi_\alpha : \mathbb{Q}(\alpha) \longrightarrow \mathbb{Q}(\alpha)$ l'endomorfismo di $\mathbb{Q}(\alpha)$ (come $\mathbb{Q}$-spazio vettoriale) definito da $x \to \alpha x$.

    Mostrare che il polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}$ e il polinomio caratteristico di φ_α coincidono.