Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2014/2015
AL310 - Teoria di Galois (prof. Gabelli)
Esercizi 2

1. Sia $F \subseteq K$ un ampliamento di campi e sia $\alpha \in K$. Mostrare che
   (a) α è algebrico su F se e soltanto se α^n è algebrico su F, per ogni $n \geq 1$.
   (b) Se α ha grado dispari su F, allora α^2 ha lo stesso grado di α.

2. Mostrare che $\pi + \frac{1}{\pi}$ è algebrico su $\mathbb{Q}(\pi^2)$ e determinarne il grado.

3. Sia K un ampliamento di grado due di $\mathbb{Q}$. Mostrare che $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, dove $d \in \mathbb{Z}$ ed è privo di fattori quadratici.

4. Siano $z, z' \in \mathbb{C}$. Verificare che
$$||z|| \cdot ||z'|| = ||zz'||$$
(dove, se $z = a + bi$, $||z|| = a^2 + b^2$ è la *norma* di z).

5. Si scrivano i seguenti numeri complessi, i loro coniugati ed i loro inversi in *forma trigonometrica*, ovvero nella forma $\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, con $\rho \in \mathbb{R}^+$, e $0 < \theta \leq 2\pi$:
$$5,\ -7,\ i,\ -3i,\ 1+i,\ -\sqrt{3}+i.$$
Determinare inoltre le loro radici terze e quarte e rappresentarle sul piano di Gauss.

6. Sia $\xi = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$ una radice n-sima dell'unità. Se m è il minimo intero positivo tale che $\xi^m = 1$, si dice che ξ ha *ordine* m. Con questa terminologia, le radici *primitive* n-sime sono esattamente quelle di ordine n.

   Dimostrare che:

   (1) Se k divide n, ξ ha ordine $\frac{n}{k}$;

   (2) Se m è l'ordine di ξ, m divide n (*Suggerimento*: dividere n per m);

   (3) Se $d := MCD(n, k)$, l'ordine di ξ è $\frac{n}{d}$;

   (4) ξ è una radice n-sima primitiva se e soltanto se $d := MCD(n, k) = 1$;

   (5) Se ξ è una radice n-sima primitiva, tutte e sole le radici n-sime di 1 sono
$$\xi, \xi^2, \ldots, \xi^n = 1.$$

7. Determinare il gruppo delle radici n-sime dell'unità per
$$n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12.$$
Stabilire inoltre qual è l'ordine di ogni radice.

8. Sia $m \geq 2$ e $\xi_m = \cos(\frac{2\pi}{m}) + i\sin(\frac{2\pi}{m})$. Mostrare che $\mathbb{Q}(\xi_n) \subseteq \mathbb{Q}(\xi_{2n})$.

   Mostrare inoltre che vale l'uguaglianza se n è dispari e dare un esempio in cui l'inclusione è stretta.

9. Si dimostri che, se $n = 2^h$, con $h \geq 2$, le $\varphi(n)$ radici complesse primitive dell'unità non costituiscono una base dell'n-esimo ampliamento ciclotomico di $\mathbb{Q}$.

10. Sia $\xi_t := \cos(\frac{2\pi}{t}) + i\sin(\frac{2\pi}{t})$, $t \geq 2$.

    Mostrare che, se $MCD(m, n) = 1$ e $1 = am + bn$ è una identità di Bezout, $a, b \in \mathbb{Z}$, allora $\xi_{mn} = \xi_m^b \xi_n^a$.

    Dedurne che, se $MCD(m, n) = 1$, allora $\mathbb{Q}(\xi_m, \xi_n) = \mathbb{Q}(\xi_{mn})$.

11. Mostrare che, se $\eta, \zeta \in \mathbb{C}$ sono radici primitive dell'unità di ordine n ed m rispettivamente, allora $\xi := \eta\zeta$ è una radice primitiva di ordine uguale a $mcm(n, m)$.

    In particolare, se $MCD(m, n) = 1$, allora $\xi := \eta\zeta$ è una radice primitiva mn-sima dell'unità.

12. Usando la posizione $T = X + \frac{1}{X}$, calcolare, nella forma $a + bi$, le radici del quinto polinomio ciclotomico: $\Phi_5(X) := X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ (Ovvero, calcolare le radici primitive quinte dell'unità).