Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2014/2015
AL310 - Teoria di Galois (prof. Gabelli)
Esercizi 3

1. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Mostrare che:

   (1) Se α e β hanno lo stesso polinomio minimo su $\mathbb{Q}$, allora $\mathbb{Q}(\alpha)$ e $\mathbb{Q}(\beta)$ sono campi isomorfi. Dare inoltre un esempio in cui $\mathbb{Q}(\alpha) \neq \mathbb{Q}(\beta)$.

   (2) Dare un esempio in cui $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\beta)$ ma α e β non hanno lo stesso polinomio minimo su $\mathbb{Q}$.

2. Sia $c > 0$. Determinare il grado su $\mathbb{Q}$ del campo di spezzamento in $\mathbb{C}$ del polinomio $X^3 + cX + 1$.

3. Sia ξ una radice primitiva nona dell'unità e sia $\alpha := \xi + \xi^{-1}$. Mostrare che il polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}$ è $m(X) := X^3 - 3X + 1$. Poiché la scelta di ξ è arbitraria, dedurne che le radici di $m(X)$ sono $\alpha, \beta := \xi^2 + \xi^{-2}, \gamma := \xi^4 + \xi^{-4}$ e perciò $m(X)$ ha tre radici reali. Mostrare inoltre che $\beta, \gamma \in \mathbb{Q}(\alpha)$.

4. Mostrare che il campo di spezzamento in $\mathbb{C}$ di $f(x) = x^4 + 2x^2 + 9$ è $\mathbb{Q}(i\sqrt{2})$.

5. Mostrare che i polinomi $x^4 - 9$ e $x^4 - 2x^2 - 3$ hanno lo stesso campo di spezzamento in $\mathbb{C}$.

6. Ricordiamo che una radice quinta primitiva dell'unità è

$$\varepsilon := \frac{-1+\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} i.$$

   (a) Posto $\alpha := \sqrt{10+2\sqrt{5}}\ i$, dimostrare che $\mathbb{Q}(\varepsilon) = \mathbb{Q}(\alpha)$. Dire perché il grado di $\alpha + \epsilon$ su $\mathbb{Q}$ non può essere 3.

   (b) Calcolare il polinomio minimo $m(X)$ di α su $\mathbb{Q}$.

   (c) Verificare che $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ è il campo di spezzamento di $m(X)$ su $\mathbb{Q}$.

7. Sia $\zeta \in \mathbb{C}$ una radice primitiva ottava dell'unità. Dimostrare che $\mathbb{Q}(\zeta) = \mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$.

8. Sia $\alpha := \sqrt[4]{3}$ e $K := \mathbb{Q}(\alpha)$.

   (a) Determinare il polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}$.

   (b) Verificare che $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \subseteq K$ e determinare il polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

   (c) Posto $\beta := \sqrt{3} + \sqrt[4]{27} - 2$, dire perchè $\beta \in K$, determinare l'inverso razionalizzato di β in K e il polinomio minimo di β su $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

9. Determinare il campo di spezzamento in $\mathbb{C}$ dei seguenti polinomi e calcolarne il grado su $\mathbb{Q}$:

$$X^4 - X^3 + 4X^2 - 3X + 3\,, \quad X^9 - 1\,, \quad X^7 - 2.$$

$$X^4 + X^2 - 1\,, \quad X^4 + 30X^2 + 45\,, \quad X^4 + X^3 + X^2 + X + 1.$$

10. Si costruisca un campo di spezzamento su $\mathbb{Q}$ dei polinomi

$$X^2 - 5\,, \quad X^5 + 2\,.$$

    Si costruisca inoltre il loro composto e se ne determini il grado su $\mathbb{Q}$.

11. Calcolare l'n-simo polinomio ciclotomico per $2 \leq n \leq 21$.

12. Sia ξ una radice primitiva settima dell'unità. Determinare il polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}$ per $\alpha = \xi^3 + \xi^4$, $\alpha = \xi^3 + \xi^5 + \xi^6$.