Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2014/2015
AL310 - Teoria di Galois (prof. Gabelli)
Esercizi 4

1. Siano p un numero primo e U un'indeterminata su $\mathbb{F}_p$.

   (a) Posto $T := U^p, K := \mathbb{F}_p(T)$, verificare che $K(U) = \mathbb{F}_p(U)$.

   (b) Dire perchè ogni elemento di $\mathbb{F}_p(U)$ è algebrico su K.

   (c) Dimostrare che il polinomio $f := X^p - T \in K[X]$ è irriducibile su K. [Sugg.: ricordare che l'anello $\mathbb{F}_p[T]$ un dominio a fattorizzazione unica...]

   (d) Dimostrare che f ha un'unica radice in ogni suo campo di spezzamento.

   (e) Determinare un campo di spezzamento L di f su K, e calcolare $[L : K]$.

2. Siano p un numero primo e $k \geq 1$ un intero. Sia $F \subseteq K$ un'estensione di campi di grado p^k. Sia $f(x) \in F[x]$ un polinomio irriducibile su F di grado strettamente compreso tra 1 e p. Dimostrare che $f(x)$ non ha radici in K.

3. Siano K un campo, $f(X) \in K[X]$ un polinomio irriducibile, L un campo di spezzamento di f su K.

   (a) Dimostrare che se $\alpha, \beta \in L$ sono radici di $f(X)$, allora $K(\alpha)$ e $K(\beta)$ sono isomorfi come campi e come K-spazi vettoriali.

   (b) Stabilire, motivando la risposta, se l'asserzione (a) è vera quando $f(X)$ è riducibile.

4. Sia $K = \mathbb{Q}(\sqrt{6}, \sqrt{14}, \sqrt{21})$.

   (a) Calcolare $[K : \mathbb{Q}]$ e trovare una base di K su $\mathbb{Q}$.

   (b) Dimostrare che K è il campo di spezzamento del polinomio $f(X) = X^4 - 40X^2 + 64 \in \mathbb{Q}$.

5. Determinare il campo di spezzamento su $\mathbb{Q}$ di uno dei seguenti polinomi:

$$X^4 - 9X^2 + 20\,; \quad X^4 - 4X^2 + 2\,; \quad X^4 - 2X^2 - 1$$

e calcolarne il grado.

6. Determinare tutte le immersioni in $\mathbb{C}$ dei seguenti campi e stabilire quali tra essi sono automorfismi:

$$\mathbb{Q}(\sqrt{3}); \quad \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i); \quad \mathbb{Q}(\sqrt[5]{3}); \quad \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}, \sqrt{3}); \quad \mathbb{Q}(\sqrt[3]{\sqrt{2}+\sqrt{3}}).$$

7. Si determini un'immersione $\varphi : \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) \hookrightarrow \mathbb{C}$ che non sia un automorfismo di $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ e si estenda φ ad un automorfismo di $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$.

8. Si costruiscano tutte le immersioni in $\mathbb{C}$ dell'n-simo polinomio ciclotomico $\mathbb{Q}(\xi)$ (ξ una radice n-sima primitiva dell'unità). Mostrare inoltre che ogni immersione è un automorfismo di $\mathbb{Q}(\xi)$.

9. Sia $p(X) \in \mathbb{F}_p[X]$ un polinomio irriducibile di grado n e sia α una sua radice, in un opportuno ampliamento K di $\mathbb{F}_p$. Mostrare che tutte e sole le radici di $p(X)$ sono $\alpha, \alpha^p, \alpha^{p^2}, \ldots, \alpha^{p^n}$ e quindi il campo di spezzamento di $p(X)$ in K è $\mathbb{F}_p(\alpha)$.

10. Si consideri il polinomio $f := X^4 + X^3 + X^2 + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$.

    (a) Determinare un campo L contenente una radice α di f tale che $\alpha \notin \mathbb{F}_2$, e un'immersione $\iota : \mathbb{F}_2 \hookrightarrow L$.

    (b) Dimostrare che f si decompone in fattori lineari in $L[X]$ e quindi $\mathbb{F}_2(\alpha)$ è un campo di spezzamento di f su $\mathbb{F}_2$.