Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2014/2015
AL310 - Teoria di Galois (prof. Gabelli)
Esercizi 5

1. Determinare un elemento primitivo per i seguenti ampliamenti:

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}), \quad \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[4]{2}), \quad \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{5}), \quad \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}).$$

2. Siano $\alpha := \sqrt[3]{2}$, $\xi \in \mathbb{C}$ una radice primitiva terza dell'unià e sia $K := \mathbb{Q}(\alpha, \xi)$. Dimostrare che $\alpha + \alpha\xi$ è un elemento primitivo per K mentre $\alpha - \alpha\xi$ non lo è.

3. Sia $m(X)$ il polinomio minimo su $\mathbb{Q}$ di $\sqrt[3]{5} + i$. Determinare tutte le radici complesse di $m(X)$.

4. Poniamo $\alpha := i + \sqrt[3]{7}$, $K := \mathbb{Q}(\alpha)$.

   (a) Determinare il grado del polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}$.

   (b) Dopo aver mostrato che $\mathbb{Q}(i) \subset K$, determinare tutte le $\mathbb{Q}(i)-$immersioni di K in $\mathbb{C}$.

   (c) Sia $\phi : K \longrightarrow \mathbb{C}$ un omomorfismo di campi non nullo. Determinare i possibili valori di $\phi(\alpha + \sqrt[3]{49})$.

5. Si determini un'immersione $\varphi : \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) \hookrightarrow \mathbb{C}$ che non sia un automorfismo di $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ e si estenda φ ad un automorfismo di $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$.

6. Siano p, q numeri primi distinti.

   (a) Determinare un campo di spezzamento K del polinomio

   $$X^4 - (p+q)X^2 + pq \in \mathbb{Q}[X]$$

   su $\mathbb{Q}$.

   (b) Calcolare $[K : \mathbb{Q}]$, e determinare due basi distinte di K come $\mathbb{Q}-$spazio vettoriale.

   (c) Determinare tutte le $(\mathbb{Q}-)$immersioni di K in $\mathbb{C}$, e mostrare che ognuna di esse è un $(\mathbb{Q}-)$automorfismo di K.

7. Sia K un campo di caratteristica prima p. Mostrare che l'applicazione

$$\Phi : K \longrightarrow K, ; \quad x \mapsto x^p$$

è un omomorfismo di campi. Dedurne che, se K è finito, Φ è un automorfismo di K (Φ si chiama l'*immersione di Fröbenius*).

Mostrare poi che Φ non è un automorfismo del campo delle funzioni razionali $\mathbb{F}_p(X)$.

8. Determinare per ciascuno dei seguenti polinomi di $\mathbb{F}_p[X]$ un campo di spezzamento su $\mathbb{F}_p$, per i valori di p a fianco indicati.

Inoltre, determinare il grado su $\mathbb{F}_p$ di ciascuno dei campi di spezzamento trovati e dimostrare che due campi dello stesso grado sono isomorfi, costruendo esplicitamente tutti i loro isomorfismi.

(a) $p = 2$; $X^3 + X + 1$, $X^3 + X^2 + 1$, $X^4 + X + 1$, $X^4 + X^2 + X^3 + X + 1$, $X^4 + 1$, $X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.

(b) $p = 3$; $X^3 + 2X + 1$, $X^4 + 2$, $X^4 - X^3 - X - 1$.

(c) $p = 5$; $X^3 + 2X + 1$.

(e) $p = 7$; $X^3 - 3$, $X^4 + 5$.

(m) $p = 13$; $X^3 - 5$.