Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2014/2015
AL310 - Teoria di Galois (prof. Gabelli)
Esercizi 6

1. Stabilire quali tra i seguenti polinomi sono separabili su $\mathbb{Q}; \mathbb{C}; \mathbb{F}_2; \mathbb{F}_3$:
   (a) $X^3 + 1$;
   (b) $X^2 - 2X + 1$;
   (c) $6X^2 + X + 1$;
   (d) $X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$;
   (e) $X^9 + X^3 + 1$.
2. Sia K un campo finito con p^n elementi. Mostrare che ogni elemento di K ha in K una radice p-esima e che tale radice è unica.
3. Determinare il numero dei polinomi di grado 2 irriducibili su $\mathbb{F}_p$.
4. Stabilire se esistono polinomi irriducibili su $\mathbb{F}_3$ di grado 2 o 3 che si spezzano linearmente sul campo con 27 elementi e in caso affermativo determinarne almeno uno.
5. Scrivere i seguenti polinomi simmetrici di $\mathbb{Z}[X_1, X_2, X_3]$ come polinomi valutati nelle funzioni simmetriche elementari:
$$X_1^3 + X_2^3 + X_3^3, \quad X_1^2X_2 + X_1^2X_3 + X_2^2X_1 + X_2^2X_3 + X_3^2X_1 + X_3^2X_2.$$
6. Dimostrare che, per ogni permutazione $\sigma \in S_n$, l'applicazione
$$F(X_1, \dots, X_n) \longrightarrow F(X_1, \dots, X_n)\,; \quad \varphi(X_1, \dots, X_n) \mapsto \varphi(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)})$$
è un automorfismo di campi.
7. (*Determinante di Vandermonde*). Sia $A[X_1, \dots, X_n]$ l'anello dei polinomi in n indeterminate a cofficienti nel dominio A. Data la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ X_1 & X_2 & \dots & X_n \\ X_1^2 & X_2^2 & \dots & X_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_1^{n-1} & X_2^{n-1} & \dots & X_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

si indichi con $V(\mathbf{X}) := V(X_1, \ldots, X_n)$ il determinante di M. Dimostrare che
$$V(\mathbf{X}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (X_i - X_j)$$
Suggerimento: Si proceda per induzione su n e si usino le operazioni elementari su righe e colonne della matrice.

8. Dimostrare che un polinomio e la sua forma ridotta hanno lo stesso discriminante.

9. Calcolare il discriminante del polinomio $X^3 + pX + q \in \mathbb{Q}[X]$.

10. Calcolare il discriminante del polinomio $X^4 + bX^2 + c \in \mathbb{Q}[X]$.

11. Calcolare il discriminante del polinomio $X^n + a \in \mathbb{Q}[X]$, $n \geq 2$.

12. Calcolare il discriminante del p-esimo polinomio ciclotomico $\Phi_p(X)$. *Suggerimento*: Scrivere $\Phi_p(X) = (X^p - 1)/(X - 1)$ ed usare la formula $D(f) = \prod_i f'(\alpha_i)$.

13. Mostrare che un polinomio su $\mathbb{Q}$ con tutte radici reali ha discriminante positivo.

14. Sia K un campo di spezzamento del polinomio $f(X) \in F[X]$ e sia $D := D(f)$ il discriminante di $f(X)$. Mostrare che se $\delta^2 = D$, allora $F \subseteq F(\delta) \subseteq K$.

15. Applicare l'esercizio precedente al caso in cui K sia il p-esimo ampliamento ciclotomico.