**Università degli Studi Roma Tre**
**Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2014/2015**
**AL310 - Teoria di Galois (prof. Gabelli)**
**Esercizi 7**

1. Sia $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ con gruppo di Galois $\mathfrak{G} = Gal_{\mathbb{Q}} f(X)$ e siano $\alpha_1, \dots \alpha_n$ le sue radici distinte. Sia poi $\Psi : \mathfrak{G} \longrightarrow S_n$ l'applicazione che ad ogni $\varphi \in \mathfrak{G}$ associa la permutazione $\sigma^{\varphi} \in S_n$ definita da $\sigma^{\varphi}(\alpha_i) = \varphi(\alpha_i)$.

   (1) Verificare che $\Psi$ è un omomorfismo iniettivo di gruppi.

   (2) Verificare che se, rispetto all'ordinamento $\alpha_1, \dots \alpha_n$, si ha $\Psi(\mathfrak{G}) = G$, allora, rispetto all'ordinamento $\alpha_{\tau(1)}, \dots, \alpha_{\tau(n)}$ risulta $\Psi(\mathfrak{G}) = \tau \circ G \circ \tau^{-1}$.

2. Determinare il gruppo di Galois su $\mathbb{Q}$ dei seguenti polinomi ed un sottogruppo di $S_n$ ad esso isomorfo:

   (a) $x^3 - 5$;
   (b) $(x^2 - 2)(x^3 - 3)$;
   (c) $x^3 - 10x^2 - 8x + 64$;
   (d) $X^4 + 30X^2 + 45$;
   (e) $x^4 - 2$;
   (f) $x^6 + 3$;
   (g) $x^8 - 2$;
   (h) $X^n - 1$;
   (i) $\Phi_n(X)$; ($n$-simo polinomio ciclotomico)
   (j) $f_\alpha$ dove $f_\alpha$ è il polinomio minimo di $\alpha := cos(\frac{2\pi}{7})$.

3. Sia $K = \mathbb{Q}(\xi)$ l'ottavo ampliamento ciclotomico. Vedendo $K$ come il campo di spezzamento dei polinomi $X^8 - 1$ e $\Phi_8(X) = X^4 + 1$ , costruire un'immersione di $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}} K$ in $\mathbf{S_8}$ e $\mathbf{S_4}$ rispettivamente.

4. Sia $n > 2$ e $f(x) = x^n - 2$. Mostrare che se $M.C.D.(n, \phi(n)) = 1$, allora il gruppo di Galois di $f(x)$ su $\mathbb{Q}$ ha ordine $n\phi(n)$.

5. In ciascuno dei seguenti casi si calcoli il campo di spezzamento e il gruppo di Galois del polinomio dato:

(a) $(x^2 + x + 1)(x^3 + x^2 + 1) \in \mathbb{F}_2[x]$;

(b) $(x^3 + x + 1)(x^6 + x + 1) \in \mathbb{F}_3[x]$;

(c) $(x^4 + x + 1)(x^4 + x^3 + 1)(x^2 + x + 1)(x^3 + x + 1) \in \mathbb{F}_2[x]$;

(d) $(x^3 + x + 1)(x^3 + x^2 + 1)(x^9 + x^6 + 1)(x^27 + 2x^9 + 1) \in \mathbb{F}_3[x]$.

6. Mostrare che una chiusura algebrica di $\mathbb{F}_p$ è $\bigcup_{n \geq 1} \mathbb{F}_{p^n}$.