

Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2014/2015
AL310 - Teoria di Galois (prof. Gabelli)
Esercizi 8

1. Esplicitare la corrispondenza di Galois per il polinomio $X^3 - 5$.
2. Mostrare che il gruppo di Galois su \mathbb{Q} del polinomio $f(x) = x^4 + x^2 - 1$ è un gruppo diedrale di grado 4. Determinare inoltre tutti i sottocampi del campo di spezzamento di $f(x)$ che sono normali su \mathbb{Q} .

Suggerimento: Notare che $\mathbb{Q}(\sqrt{5}, i)$ è contenuto nel campo di spezzamento di $f(x)$.

3. Esplicitare la corrispondenza di Galois per i seguenti polinomi :

$$f(X) = X^4 + 30X^2 + 45, \quad g(X) = X^4 + 2X^2 + 9, \quad h(X) = X^4 - 3 \in \mathbb{Q}[X].$$

4. Sia $\mathbb{Q} \subseteq K$ un ampliamento di Galois di grado 4. Mostrare che K è un ampliamento biquadratico di \mathbb{Q} se e soltanto se il suo gruppo di Galois è un gruppo di Klein.
5. Esplicitare la corrispondenza di Galois per il k -esimo ampliamento ciclotomico per $k = 5, 7, 8, 9, 11, 12, 15, 21$.
6. Determinare un ampliamento ciclotomico contenente \sqrt{d} , per $d = 3, 6, 11, 12, -15$.

Suggerimento: Ricordare che se $MCD(m, n) = 1$, allora $\mathbb{Q}(\xi_{mn}) = \mathbb{Q}(\xi_n, \xi_m)$.

7. Sapendo che per ogni $n \geq 2$ esiste un numero primo p tale che $p \equiv 1 \pmod{n}$ (Dirichlet), dimostrare che per ogni $n \geq 1$ esiste un polinomio di grado n irriducibile su \mathbb{Q} il cui gruppo di Galois è ciclico di ordine n .

Suggerimento: Applicare la corrispondenza di Galois al p -esimo ampliamento ciclotomico.

8. Dimostrare che per ogni numero positivo $n \geq 3$ esiste un polinomio di grado $\frac{\varphi(n)}{2}$ irriducibile su \mathbb{Q} che ha tutte radici reali.

Suggerimento: Lavorare nell' n -esimo ampliamento ciclotomico.

9. Determinare due polinomi irriducibili su \mathbb{Q} di grado 3 e 5 rispettivamente che hanno tutte radici reali.
10. Applicare la corrispondenza di Galois all'ampliamento $\mathbb{F}_p \subseteq \mathbb{F}_{p^n}$, $p \geq 2$ primo e $n \geq 2$.