Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2014/2015
AL310 - Teoria di Galois (prof. Gabelli)
Esercizi 9

1. Determinare il gruppo di Galois dei seguenti polinomi:

$$x^5 - 1; \quad x^6 + 3; \quad x^8 - 2; \quad x^8 - 9$$

   ed una sua immersione in S_n (n opportuno).

2. Sia $n > 2$ e $f(x) = x^n - 2$. Mostrare che se $(n, \varphi(n)) = 1$, il gruppo di Galois di $f(x)$ su $\mathbb{Q}$ ha ordine $n\phi(n)$.

3. Sia $\xi_{12} \in \mathbb{C}$.

   (1) Determinare la struttura del gruppo $Gal_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\xi_{12}))$ e il reticolo dei suoi sottogruppi.

   (2) Dimostrare che i campi $F_1 := \mathbb{Q}(i)$, $F_2 := \mathbb{Q}(i\sqrt{3})$, $F_3 := \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ sono contenuti in $\mathbb{Q}(\xi_{12})$.

4. Sia dato il polinomio $f(x) := x^5 + 3x^2 - 3x - 3 \in \mathbb{Q}[x]$. Mostrare che il gruppo di Galois di $f(X)$ su $\mathbb{Q}$ è isomorfo a S_5.

5. Si ponga $K := \mathbb{Q}(\sqrt{10}, \sqrt{14}, \sqrt{35})$.

   (1) Si calcoli $[K : \mathbb{Q}]$, giustificando la risposta;

   (2) Si trovino tutti i campi intermedi fra $\mathbb{Q}$ e K.

6. Determinare tutti gli ampliamenti di grado 3 su $\mathbb{Q}$ contenuti nel 18-simo ampliamento ciclotomico.

7. Sia $\mathbb{Q} \subseteq K$ un ampliamento di Galois di grado 4. Mostrare che se il gruppo di Galois di K su $\mathbb{Q}$ è ciclico, allora $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ con $\alpha = \sqrt{a + b\sqrt{t}}$, $a, b, t \in \mathbb{Q}$.

   Determinare inoltre un tale α per il quinto ampliamento ciclotomico.

8. Supponiamo che K sia un ampliamento normale di $\mathbb{Q}$ con gruppo di Galois isomorfo ad A_4. Mostrare che K non può essere un ampliamento radicale di $\mathbb{Q}$.

9. Siano $f(X), g(X) \in \mathbb{Q}[X]$ con campi di spezzamento L ed M rispettivamente. Mostrare che:

   (1) LM è il campo di spezzamento del polinomio prodotto $f(X)g(X)$;

   (2) Se $L \cap M = \mathbb{Q}$, risulta $Gal_{\mathbb{Q}}LM \cong Gal_{\mathbb{Q}}L \times Gal_{\mathbb{Q}}M$ (prodotto diretto).

   Suggerimento: Verificare che l'applicazione

   $$Gal_{\mathbb{Q}}LM \longrightarrow Gal_{\mathbb{Q}}L \times Gal_{\mathbb{Q}}M \,; \varphi \mapsto (\varphi|_L, \varphi|_M)$$

   è un isomorfismo.

10. Si consideri il polinomio $f(T) := T^4 - 10T^2 + 20 \in \mathbb{Q}[T]$ e sia $K \subseteq \mathbb{C}$ il suo campo di spezzamento.

    (1) Si calcoli $[K : \mathbb{Q}]$ e un elemento primitivo di K su $\mathbb{Q}$;

    (2) Si determini il gruppo di Galois di $f(T)$ su $\mathbb{Q}$;

    (3) Si determini il gruppo di Galois dei seguenti polinomi

    $$f(T)(T^2 - 5)\,; \qquad f(T)(T^2 + 5)\,; \qquad f(T)(T^3 - T - 2).$$