

Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2014/2015
AL310 - Teoria di Galois (prof. Gabelli)
Richiami di Teoria dei Gruppi

1. Determinare il reticolo dei sottogruppi dei gruppi:
 \mathbb{Z}_{12} ; $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{12})$;
 Δ_4 (gruppo diedrale di grado 4); Δ_5 (gruppo diedrale di grado 5);
 \mathbf{S}_3 ; \mathbf{S}_4 ; \mathbf{H} (gruppo delle unità dei quaternioni).
Determinare inoltre quali sottogruppi sono normali.
2. Mostrare che \mathbf{S}_n è generato da uno qualsiasi dei seguenti insiemi:
 $\{(a, b); 1 \leq a, b \leq n\}$; $\{(1, b); 1 \leq b \leq n\}$; $\{\tau, \gamma\}$
dove $\tau = (12)$ e $\gamma = (12 \dots n)$.
3. Scrivere le seguenti permutazioni di \mathbf{S}_9 come prodotto di cicli disgiunti.
Determinarne inoltre l'ordine e la parità:
 $(143)(2531)(24)$; $(176)(914)$; $(23)(21)(24)$;
 $(13579)(2468)$; $(1653)(4368)(879)$; $(13)(1435)(7986)(123)$.
4. Mostrare che, se H è un sottogruppo di \mathbf{S}_n che contiene una permutazione dispari, allora esattamente la metà delle permutazioni di H sono dispari (in particolare l'ordine di H è pari).
5. Mostrare che se $\pi \in \mathbf{S}_n$ e $\gamma = (a_1, a_2, \dots, a_r)$ è un r -ciclo, allora
 $\pi^{-1}\gamma\pi := \pi \circ \gamma \circ \pi^{-1} = (\pi(a_1), \pi(a_2), \dots, \pi(a_r))$.
Dedurre che tutti gli r -cicli sono coniugati in \mathbf{S}_n .
6. Determinare le classi coniugate di \mathbf{S}_4 .
7. Siano $\alpha, \tau \in I \subseteq \mathbf{S}_9$ con
 $I = \{(13564), (45)(842)(793), (34)(867), (36578)(1429), (13)(76)(47)\}$.
Determinare $\tau^{-1}\alpha\tau$.
8. Determinare (se esiste) $\tau \in \mathbf{S}_9$ tale che $\beta = \tau^{-1}\alpha\tau$ quando:
(a) $\alpha = (1357)$, $\beta = (2468)$;
(b) $\alpha = (12)(5389)$, $\beta = (35)(1476)$;

- (c) $\alpha = (12)(34)(67)$, $\beta = (23)(46)(17)$;
- (d) $\alpha = (4657)(98123)$, $\beta = (5746)(123)(89)$;
- (e) $\alpha = (123456789)$, $\beta = (675983241)$.

9. Mostrare che i 5-cicli si ripartiscono in due classi coniugate di \mathbf{A}_5 (benché essi siano tutti coniugati in \mathbf{S}_5).
10. Identificare Δ_4 ad un sottogruppo di \mathbf{S}_4 e determinare due elementi di Δ_4 che sono coniugati in \mathbf{S}_4 ma non in Δ_4 .
11. Sia G un gruppo e siano H, K sottogruppi di G . Mostrare che:
 - (a) $HK := \{hk; h \in H, k \in K\}$ è un sottogruppo di G se e soltanto se $HK = KH$;
 - (b) Se H è normale in G , allora $\langle H \cup K \rangle = HK$;
 - (c) $|HK| = |H||K|/|H \cap K|$.

Usando questi fatti, dimostrare poi che:

- (d) Se $F \subseteq K$ è un ampliamento di Galois e L, M sono due campi intermedi normali su F , allora

$$\text{Gal}_{L \cap M}(K) = \text{Gal}_L(K) \text{Gal}_M(K) =: \{\varphi\psi; \varphi \in \text{Gal}_L(K), \psi \in \text{Gal}_M(K)\};$$

se inoltre $LM = K$, allora tale prodotto è un prodotto diretto di gruppi.

12. Siano G un gruppo, H un sottogruppo di G e si consideri l'insieme $N := \{g \in G; gHg^{-1} = H\}$.
Mostrare che:
 - (a) N è un sottogruppo di G ;
 - (b) H è un sottogruppo normale di N ;
 - (c) Se K è un sottogruppo di G e H è normale in K , allora $K \subseteq N$;
 - (d) H è normale in G se e soltanto se $N = G$.

Il gruppo N si dice il *normalizzante* di H in G .

13. Mostrare che:
 - (a) Se $H := \{(1), (12), (34), (12)(34)\} \subseteq \mathbf{S}_4$, allora il normalizzante di H in \mathbf{S}_4 è il sottogruppo di ordine 8 generato da $(34), (1324)$.

(b) Se $H := \mathbf{V}_4 := \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \subseteq \mathbf{S}_4$, allora il normalizzante di H in \mathbf{S}_4 è \mathbf{S}_4 stesso.

(c) Se $H := \{(1), (123), (132)\} \subseteq \mathbf{A}_4 \subseteq \mathbf{S}_4$, allora il normalizzante di H in \mathbf{A}_4 è H stesso, mentre il normalizzante di H in \mathbf{S}_4 è il sottogruppo $N := \{(1), (123), (132), (12), (13), (24)\}$.

14. Sia $M \subseteq \mathbf{S}_5$ il sottogruppo generato dai cicli $\gamma := (12345)$ ed $\eta := (2354)$. Mostrare che M è il normalizzante di $\langle \gamma \rangle$ in \mathbf{S}_5 . Dedurre che $M = \{\gamma^i \eta^j\}$ ha 20 elementi. M si dice il *gruppo metaciclico* di grado 5.

15. Sia G un gruppo, comunque scelti $a, b \in G$, poniamo

$$[a, b] := a^{-1}b^{-1}ab.$$

L'elemento $[a, b]$ si dice il *commutatore* di a e b ed il sottogruppo G' di G generato da tutti i commutatori, si dice il sottogruppo *derivato* di G . Mostrare che:

- (a) $G' = \{e\}$ se e soltanto se G è abeliano;
- (b) G' è un sottogruppo caratteristico (e quindi normale) di G ;
- (c) G/G' è abeliano;
- (d) Se N è un sottogruppo normale di G e G/N è abeliano, allora $G' \subseteq N$;
- (e) Se H è un sottogruppo di G tale che $G' \subseteq H$, allora H è normale;
- (f) Se $Z := Z(G)$ è il centro di G e $\{a_i : i \in I\}$ è un insieme di rappresentanti delle classi laterali di Z in G , allora G' è generato da $\{[a_i, a_j] : i, j \in I\}$.

16. Sia G un gruppo. Poniamo $G(0) := G$ e, per ogni $k \geq 1$, indichiamo con $G(k)$ il derivato di $G(k-1)$. La catena di sottogruppi di G

$$G(0) := G \supseteq G(1) := G' \supseteq \dots \supseteq G(k) \supseteq \dots$$

si dice la *serie derivata* di G .

Usando le proprietà elencate nell'esercizio precedente, determinare la serie derivata dei gruppi:

$$\Delta_4 ; \Delta_5 ; \mathbf{S}_3 ; \mathbf{S}_4 ; \mathbf{H}.$$