Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2014/2015
AL310 - Teoria di Galois (prof. Gabelli)
Richiami sui polinomi

1. Sia A un dominio di integrità. Dimostrare che il polinomio $p(X) \in A[X]$ è irriducibile su A se e soltanto se lo è ogni suo polinomio associato.

2. Sia $f(X)$ uno dei seguenti polinomi:
   $$21X\,; \quad 21X+7\,; \quad 6X^2-5X+1\,; \quad 6X^3-7X^2-X+2.$$
   Determinare esplicitamente tutti i divisori di $f(X)$ in $\mathbb{Z}[X]$ e $\mathbb{Q}[X]$ e ripartirli in classi di polinomi associati (in $\mathbb{Z}[X]$ e $\mathbb{Q}[X]$).

3. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false in $\mathbb{Z}[X]$ e $\mathbb{Q}[X]$.
   (a) $3X$ divide $7X^2$;
   (b) $X-3$ divide X^3-3X^2+X-3 ;
   (c) $3(X-3)$ divide X^3-3X^2+X-3 .

4. Mostrare che il polinomio $\overline{2}X^3+\overline{2}X+\overline{3}$ è invertibile in $\mathbb{Z}_8[X]$, determinando esplicitamente un suo inverso.

5. Utilizzando l'Algoritmo Euclideo della divisione, determinare il massimo comune divisore monico delle seguenti coppie di polinomi ed una identità di Bezout per esso:
   $$f(X) := X^5+\overline{1}\,; \quad g(X) := \overline{3}X^3+\overline{1} \in \mathbb{Z}_5[X]\,;$$
   $$f(X) := X^5-\tfrac{1}{3}X^4-\tfrac{1}{2}X+\tfrac{1}{6}\,; \quad g(X) := X^3+\tfrac{2}{3}X^2+\tfrac{2}{3}X-\tfrac{1}{3} \in \mathbb{Q}[X]\,.$$

6. Sia $f(X) := 7X^7+6X^6+5X^5+4X^4+3X^3+2X^2+X+1$.
   Applicare il Teorema del Resto per calcolare $f(2)$.

7. Stabilire se i seguenti polinomi hanno radici razionali e in caso affermativo determinarle esplicitamente.
   $$3X^5+3X^4-14X^3-5X^2-5X-2; \quad X^5-2X^3+X^2-8X-4.$$

8. Scomporre i seguenti polinomi in fattori irriducibili di $\mathbb{Q}[X]$:
   $$5X^4-6X^2+2\,;\ X^4-3X^3+X^2-2X-3\,;\ 6X^4-7X^3+8X^2-7X+2.$$

9. Scomporre i seguenti polinomi in fattori irriducibili di $\mathbb{Z}_5[X]$:
$\overline{3}X^2 + \overline{2}X + \overline{2}\,; \quad X^3 + \overline{3}X^2 + \overline{3}X + \overline{2}\,; \quad X^4 + \overline{2}X^3 + \overline{2}X^2 + \overline{2}X + \overline{1}\;.$

10. Stabilire se i seguenti polinomi hanno radici multiple:
$$X^4 - 5X^3 + 9X^2 - 7X + 2\,; \quad X^4 + X^3 - X^2 - 2 \in \mathbb{Z}[X]$$
$$X^3 + \overline{3}X^2 + \overline{1}\,; \quad X^{10} + \overline{3}X^5 + \overline{1} \in \mathbb{Z}_5[X]$$

11. Determinare le radici complesse dei polinomi
$$X^2 - (2+3i); \quad 3X^3 + (1+i).$$

12. Stabilire se i seguenti polinomi sono irriducibili rispettivamente in $\mathbb{Z}[X]\,, \mathbb{Q}[X]\,, \mathbb{R}[X]\,, \mathbb{C}[X]$:
$$21X + 3\,; \quad X^2 + X + 3\,; \quad X^3 - 1\,; \quad 2X^4 + 5X^2 + 2.$$

13. Scomporre i seguenti polinomi in fattori irriducibili in $\mathbb{R}[X]$ e $\mathbb{C}[X]$:
$$X^4 + 1\,; \quad X^5 - 1\,; \quad X^6 - 1\,; \quad X^6 - 8\;.$$

14. Usando il criterio di irriducibilità di Eisenstein, mostrare che i seguenti polinomi sono irriducibili su $\mathbb{Q}$:
$$X^{35} - 25X^{12} + 10X^7 - 15\,; \quad 33X^{123} + 6X^{21} + 1.$$

15. Dare un esempio di polinomio irriducibile su $\mathbb{Q}$ che non soddisfa il criterio di irriducibilità di Eisenstein.

16. Usando il criterio di irriducibilità modulo p, mostrare che i seguenti polinomi sono irriducibili su $\mathbb{Q}$:
$$49X^2 + 35X + 11\,; \quad 124X^3 - 119X^2 + 35X + 64\,; \quad X^5 - 4.$$

17. Dimostrare che i seguenti polinomi di $\mathbb{Q}[X,Y]$ sono irriducibili su $\mathbb{Q}$:
$$X^3 + Y^2\,; \quad X^2 + Y^2 - 1\,; \quad X^2Y + XY^2 + 2.$$