Università degli studi Roma Tre
Corso di laurea in Matematica A.A. 2015-2016
AL310 - Istituzioni di Algebra Superiore
Seconda prova di valutazione in itinere
8 Gennaio 2016

1. Siano
$$f(X) := X^3 + 2X + 2\,, \quad g(X) := X^3 + 2X + 1 \in \mathbb{F}_3[X]$$
e siano α una radice di $f(X)$ e β una radice di $g(X)$.
   (a) Costruire i campi $K_1 := \mathbb{F}_3(\alpha)$ e $K_2 := \mathbb{F}_3(\beta)$;
   (b) Verificare che i campi K_1 e K_2 sono isomorfi e costruire esplicitamente tutti gli isomorfismi $K_1 \longrightarrow K_2$.

2. Calcolare il numero dei polinomi di grado 5 irriducibili su $\mathbb{F}_3$.

3. Sia $\xi \in \mathbb{C}$ una radice primitiva 18-sima dell'unità.
   (a) Dimostrare che $\mathbb{Q}(\xi) = \mathbb{Q}(\eta)$, dove η è una radice primitiva nona.
   (b) Determinare tutti i sottocampi di $\mathbb{Q}(\xi)$.
   (c) Per ogni sottocampo $F \subseteq \mathbb{Q}(\xi)$, determinare α tale che $F = \mathbb{Q}(\alpha)$ e calcolare il polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}$.

4. Si consideri il polinomio
$$f(X) := X^4 + 6X^2 + 3 \in \mathbb{Q}[X]$$
e sia $K \subseteq \mathbb{C}$ il suo campo di spezzamento.
   (a) Dimostrare che il gruppo di Galois di $f(X)$ su $\mathbb{Q}$ è isomorfo a D_4, gruppo diedrale di grado 4.
   (b) Determinare tutti i sottocampi di K normali su $\mathbb{Q}$.

5. Sia
$$f(X) := X^5 + 2X^2 - 2X - 2 \in \mathbb{Q}[X].$$
Dimostrare che il gruppo di Galois di $f(X)$ su $\mathbb{Q}$ è isomorfo a S_5.

6. Sia $f(X) = X^6 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ e sia $K \subseteq \mathbb{C}$ il suo campo di spezzamento.
   (a) Mostrare che il gruppo di Galois di $X^6 - 2$ su $\mathbb{Q}$ è isomorfo a D_6, gruppo diedrale di grado 6.
   (b) Mostrare che esiste un solo sottocampo F di K normale su $\mathbb{Q}$ tale che $[F : \mathbb{Q}] = 6$.
   (c) Determinare il gruppo di Galois di F su $\mathbb{Q}$.