

Università degli studi Roma Tre
Corso di laurea in Matematica A.A. 2015-2016
AL310 - Istituzioni di Algebra Superiore
Prima prova di valutazione in itinere
4 Novembre 2015

1. Sia $F := \bigcup_{n \geq 1} \mathbb{Q}(\sqrt[n]{2})$.
 - (a) Dimostrare che F è un campo.
 - (b) Dimostrare che F è un ampliamento algebrico di $\mathbb{Q}$ e che $[F : \mathbb{Q}] = \infty$.
 - (c) Stabilire se F è uguale alla chiusura algebrica $\overline{\mathbb{Q}_R}$ di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$.
2. Siano $\alpha := \frac{\pi^2 + \pi + 1}{\pi + 1} \in \mathbb{Q}(\pi)$ e $F := \mathbb{Q}(\alpha)$.
 - (a) Dimostrare che $F \not\subseteq \mathbb{Q}(\pi)$.
 - (b) Stabilire se F e $\mathbb{Q}(\pi)$ sono campi isomorfi.
 - (c) Dimostrare che π è algebrico su F e determinare il suo polinomio minimo su F .
3. Sia $f(X) := X^3 - 5X + 3 \in \mathbb{Q}[X]$ e sia $\alpha \in \mathbb{C}$ una radice di $f(X)$.
 - (a) Stabilire se gli anelli $\frac{\mathbb{Q}[X]}{(f(X))}$, $\frac{\mathbb{R}[X]}{(f(X))}$ e $\frac{\mathbb{C}[X]}{(f(X))}$ sono campi e/o domini.
 - (b) Determinare una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{Q}(\alpha)$ su $\mathbb{Q}$ ed esprimere $\frac{1}{\alpha+1}$ come combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{B}$.
 - (c) Determinare il polinomio minimo di $\alpha^2 + 1$ su $\mathbb{Q}$.
4. Sia $f(X) := X^4 - 8X^2 + 1 \in \mathbb{Q}(X)$ e sia $K \subseteq \mathbb{C}$ il campo di spezzamento di $f(X)$.
 - (a) Determinare K ed il grado $[K : \mathbb{Q}]$.
 - (b) Dimostrare che $\sqrt{6} \in K$.
 - (c) Sia $\psi : \mathbb{Q}(\sqrt{6}) \rightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{6})$ l'automorfismo definito da $\psi(\sqrt{6}) = -\sqrt{6}$. Determinare tutti gli automorfismi di K che estendono ψ .
5. Costruire un campo di spezzamento K su $\mathbb{F}_2$ del polinomio

$$X^5 + X^4 + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$$

e calcolare il grado $[K : \mathbb{F}_2]$.