

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2015/2016
AL310 - Teoria di Galois - Tutorato I

DOCENTE: PROF.SSA STEFANIA GABELLI

TUTORE: M. NANNI

ESERCIZIO 1. Fattorizzare su \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{Z}_2 e \mathbb{Z}_3 i seguenti polinomi:

$$X^5 + 2X^4 - 5X^3 - 10X^2 + 6X + 12$$

$$X^5 + 3X^4 - X^3 - 3X^2 - 2X - 6$$

$$X^5 + 2X^4 - X^3 - 2X^2 - 2X - 4$$

$$X^5 - 3X^4 - X^3 + 3X^2 + 2X - 6$$

$$X^4 - X^2 - 1$$

$$X^4 - 5X^3 + 9X^2 - 7X + 2$$

$$X^4 + 2X^2 + 4$$

ESERCIZIO 2. Provare che il polinomio

$$f(X) = \frac{27}{4}X^{100} + \frac{18}{3}X^{62} - 9X^{17} + \frac{3}{2} \in \mathbb{Q}[X]$$

è irriducibile su \mathbb{Q} . Stabilire se il polinomio $g(X) = 12f(X) \in \mathbb{Z}[X]$ è irriducibile su \mathbb{Z} .

ESERCIZIO 3. Verificare che i seguenti polinomi sono irriducibili su \mathbb{Q} .

$$49X^2 + 35X + 11$$

$$X^{35} - 25X^{12} + 10X^7 - 15$$

$$124X^3 - 119X^2 + 35X + 64$$

$$X^4 + 30X^2 + 45$$

$$X^5 + 7X^4 + 2X^3 + 6X^2 - X + 8$$

$$X^5 - 4$$

ESERCIZIO 4. Trovare le radici dei seguenti polinomi di terzo grado usando le formule di Tartaglia-Cardano.

$$X^3 - 6X + 9 \quad X^3 - 6X + 4 \quad X^3 - 2X - 4 \quad X^3 - 3X + 2 \quad X^3 + 3X + 4$$

ESERCIZIO 5. Esprimere i seguenti polinomi simmetrici di $\mathbb{Z}[X, Y, Z]$ come polinomi valutati nelle funzioni simmetriche elementari.

$$X^2Y + X^2Z + Y^2X + Y^2Z + Z^2X + Z^2Y$$

$$X^4Y^2Z + XY^4Z^2 + X^2YZ^4 + X^4YZ^2 + XY^2Z^4 + X^2Y^4Z$$

ESERCIZIO 6. Per ognuno degli $f(X)$ seguenti, date α , β e γ le sue radici, trovare il polinomio $g(X)$ le cui radici sono α^2 , β^2 e γ^2 .

$$X^3 - X^2 - 2X \quad X^3 + 2X^2 + 3X \quad X^3 - 4X + 3 \quad X^3 + 7X^2 - X + 1$$

ESERCIZIO 7. Calcolare il polinomio minimo su \mathbb{Q} di ξ_8 , ξ_{10} e ξ_{12} .

ESERCIZIO 8. Esprimere esplicitamente tramite la loro base i seguenti spazi vettoriali su \mathbb{Q} :

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \quad \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}) \quad \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt[3]{7}) \quad \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \pi)$$