Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2015/2016

AL310 - Teoria di Galois - Tutorato II

DOCENTE: PROF.SSA STEFANIA GABELLI

TUTORE: M. NANNI

ESERCIZIO 1. Sia $f(X) = X^5 - 9X^4 - 3X^2 + 3 \in \mathbb{Q}[X]$ e sia β radice di $f(X)$.
1) Stabilire se $f(X)$ è irriducibile su $\mathbb{Q}$.
2) Stabilire se $\mathbb{Q}(\beta) = \mathbb{Q}(\beta^2)$.
3) Provare che β^2 è algebrico su $\mathbb{Q}$ e trovare il suo polinomio minimo.

ESERCIZIO 2. Sia $\mathbb{Q} \subseteq K$ un ampliamento di campi tale che $[K : \mathbb{Q}] = 10$.
Spiegare perché $\sqrt[3]{2} \notin K$.

ESERCIZIO 3. Trovare il polinomio minimo dei seguenti elementi:
1) $\sqrt{2} + i$ su $\mathbb{Q}$.
2) $\sqrt{2} + i$ su $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
3) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ su $\mathbb{Q}$.
4) $\sqrt[3]{2} + \sqrt{2}$ su $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
5) $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ su $\mathbb{Q}(\sqrt{10})$.
6) ξ_8 su $\mathbb{Q}(i)$.
7) $i\sqrt[4]{5}$ su $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}(i), \mathbb{R}, \mathbb{Q}(\sqrt[4]{5}), \mathbb{C}$ e $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.
8) $\dfrac{1}{\pi}$ su $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}(\pi^3)$.
9) $\sqrt[3]{2 + \sqrt{3 - \sqrt{2}}}$ su $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}(\sqrt{2}), \mathbb{Q}(\sqrt{3 - \sqrt{2}}), \mathbb{C}$ e $\mathbb{R}$.

ESERCIZIO 4. Dimostrare che per un ampliamento quadratico $F(\gamma)$ di un campo F in caratteristica 2 non è sempre vero che $\gamma \notin F$ e $\gamma^2 \in F$.

ESERCIZIO 5. Sia dato il polinomio

$$f(X) = X^5 - X^3 - 6X - \frac{1}{3}X^4 + \frac{1}{3}X^2 + 2 \in \mathbb{Q}[X]$$

Fattorizzare ciascuno degli anelli $\dfrac{\mathbb{Q}[X]}{(f(X))}, \dfrac{\mathbb{R}[X]}{(f(X))}, \dfrac{\mathbb{C}[X]}{(f(X))}$ come prodotto di estensioni dei corrispondenti anelli dei coefficienti. Quale tra questi è campo? Quale integro?

ESERCIZIO 6. Determinare il campo di spezzamento in $\mathbb{C}$ dei seguenti polinomi su $\mathbb{Q}$. Inoltre, determinare il grado su $\mathbb{Q}$ di ciascuno dei campi trovati:
1) $X^4 - 4X^2 + 2$
2) $X^3 - 1$
3) $X^4 - 2$
4) $X^4 - 9X^2 + 20$
5) $X^5 - 3X^3 + 3X^2 - 9$

Esercizio 7. Fia $F \subseteq K$ un ampliamento di campi con $[K : F] = 385$. Sia poi $F \subsetneq L \subsetneq K$ un campo intermedio. Mostrare che le seguenti condizioni non possono essere soddisfatte contemporaneamente:
1) Esiste un campo H_1 tale che $F \subsetneq H_1 \subsetneq L$
2) Esiste un campo H_2 tale che $L \subsetneq H_2 \subsetneq K$

Esercizio 8. Si consideri il numero reale $\alpha = \sqrt{5 + \sqrt{5}}$.
1) Si determini il grado di α su $\mathbb{Q}$ e su $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.
2) Si stabilisca se tutte le radici del polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}$ sono elementi di $\mathbb{Q}(\alpha)$. (Verificare innanzitutto che $\mathbb{Q}(\sqrt{5}) \subseteq \mathbb{Q}(\alpha)$).
3) Si trovino le componenti di $\sqrt{5}$ e $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ rispetto a una opportuna base di $\mathbb{Q}(\alpha)$ su $\mathbb{Q}$.
4) Qual è il grado del polinomio minimo di $\dfrac{1}{1+\alpha}$ su $\mathbb{Q}$?
5) Sia λ una soluzione dell'equazione

$$T^{2012} + \frac{1}{1+\alpha}T^3 + \alpha^2 T^2 + \alpha T + \sqrt[5]{5} = 0$$

Dopo aver spiegato perché λ è algebrico su $\mathbb{Q}$, si dimostri che il suo polinomio minimo su $\mathbb{Q}$ ha grado ≤ 40240.