Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2015/2016

AL310 - Teoria di Galois - Tutorato III

DOCENTE: PROF.SSA STEFANIA GABELLI
TUTORE: M. NANNI

Su $\mathbb{Q}$-immersioni e loro estensioni: Determinare tutte le $\mathbb{Q}$-immersioni in $\mathbb{C}$ dei seguenti campi e stabilire quali di esse sono $\mathbb{Q}$-automorfismi:

(a) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$
(b) $\mathbb{Q}(i\sqrt{3}, i)$
(c) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[5]{3})$
(d) $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{\sqrt{2}-\sqrt{3}})$

Esercizio 1, I Esonero A.A. 2013/14
Si consideri il polinomio
$$f(X) = \frac{3}{2}X^4 + \frac{3}{2}X^2 + 6 \in \mathbb{Q}[X]$$
(a) Fattorizzare $f(X)$ in polinomi irriducibili su $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$.
(b) Determinare il campo di spezzamento di $f(X)$ in $\mathbb{C}$.
(c) Fattorizzare il polinomio $g(X) := 4 \cdot f(X)$ in polinomi irriducibili su $\mathbb{Z}$.

Esercizio 2, I Esonero A.A. 2013/14
Siano $m, n \geq 2$ due interi coprimi. Sia
$$f(X) = 2X^n - 2^{m+1} \in \mathbb{Z}[X]$$
(a) Dimostrare che
$$\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2^m}) = \mathbb{Q}(\sqrt[n]{2})$$
(b) Stabilire se $f(X)$ è irriducibile su $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$.
(c) Completare il campo $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2})$ ad un campo di spezzamento di $f(X)$ in $\mathbb{C}$.

Esercizio 3, I Esonero A.A. 2013/14
Sia $\xi_5 \in \mathbb{C}$ una radice quinta primitiva dell'unità complessa. Si ponga $F = \mathbb{Q}(\sqrt[5]{3}, \xi_5)$.
(a) Determinare il polinomio minimo di $\sqrt[5]{3}$ su $\mathbb{Q}$ e stabilire se esso è irriducibile su $\mathbb{Z}$.
(b) Determinare il polinomio minimo di ξ_5 su $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{3})$.
(c) Calcolare $[F : \mathbb{Q}]$ e determinare $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{3}) \cap \mathbb{Q}(\xi_5)$.
(d) Provare che $F = \mathbb{Q}(\sqrt[5]{3} + \xi_5)$.

Esercizio 4, I Esonero A.A. 2013/14
Sia dato
$$f(X) = X^4 + 30X^2 + 45 \in \mathbb{Q}[X]$$
e sia α una sua radice.
(a) Mostrare che $f(X)$ è irriducibile su $\mathbb{Q}$.
(b) Mostrare che il campo di spezzamento di $f(X)$ su $\mathbb{Q}$ è $\mathbb{Q}(\alpha)$.
(c) Determinare le immersioni di $\mathbb{Q}(\alpha)$ in $\mathbb{C}$ e stabilire quali di esse sono automorfismi.

Esercizio 5, I Esonero A.A. 2013/14
Sia data la funzione razionale
$$\alpha = \frac{X^2 - i}{X^3 + 1} \in \mathbb{C}(X)$$
(a) Dimostrare che α è trascendente su $\mathbb{C}$.
(b) Provare che X è algebrico su $\mathbb{C}(\alpha)$.
(c) Determinare il polinomio minimo di X su $\mathbb{C}(\alpha)$.
(d) Calcolare $[\mathbb{C}(X) : \mathbb{C}(\alpha)]$.

Esercizio 6, I Esonero A.A. 2014/15
Si consideri il polinomio
$$f(X) = (X^4 + 4X^2 + 2X)(X^2 + 1) \in \mathbb{F}_5[X]$$
(a) Fattorizzare $f(X)$ su $\mathbb{F}_5$.
(b) Costruire un'estensione K di $\mathbb{F}_5$ che sia campo di spezzamento per $f(X)$ su $\mathbb{F}_5$ ed esplicitare le radici di $f(X)$ in K.
(c) Calcolare $[K : \mathbb{F}_5]$ e la cardinalità di K.

Esercizio 7, I Esonero A.A. 2014/15
Determinare il grado e tutte le radici in $\mathbb{C}$ del polinomio minimo su $\mathbb{Q}$ di $\alpha := \sqrt{\sqrt{3} + i\sqrt[4]{3}}$.