

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2015/2016  
AL310 - Teoria di Galois - Tutorato IV

DOCENTE: PROF.SSA STEFANIA GABELLI

TUTORE: M. NANNI

*In ricordo delle 129 vittime del 13 Novembre 2015. L'odio non è una risposta.*

ESERCIZIO 1. Sia  $F$  un campo. Provare che il polinomio  $X^d - 1$  divide il polinomio  $X^n - 1$  in  $F[X]$  se e solo se  $d|n$ .

ESERCIZIO 2. Sfruttando l'esercizio 1, provare che se  $d$  è un divisore positivo di  $n$ , il polinomio  $X^{p^d} - X$  divide il polinomio  $X^{p^n} - X$  in  $\mathbb{Z}_p[X]$ .

ESERCIZIO 3. Sfruttando l'esercizio 2, provare che tutti e soli i sottocampi del campo  $\mathbb{F}_{p^n}$  sono i campi  $\mathbb{F}_{p^d}$  con  $d$  divisore positivo di  $n$ .

ESERCIZIO 4. Determinare il campo di spezzamento  $K$  del polinomio

$$f(X) = X^5 + X + 1 \in \mathbb{Z}_2[X]$$

Esibire esplicitamente il polinomio  $F(X) \in \mathbb{Z}_2[X]$  tale che  $K = \frac{\mathbb{Z}_2[X]}{(F(X))}$ . A quale campo è isomorfo  $K$ ?

ESERCIZIO 5. Trovare tutti i polinomi monici irriducibili di grado 1,2,3,4,5 e 6 su  $\mathbb{Z}_2$ .

ESERCIZIO 6. Qual è la probabilità che un polinomio monico a coefficienti in  $\mathbb{Z}_2$  di grado 5 abbia un fattore irriducibile di grado 2?