Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazioni di AL310

A.A. 2015–2016 - Docente: Prof. S. Gabelli

Esercitatore: Dario Spirito

Esercitazione 1
29 settembre 2015

1. Fattorizzare i seguenti polinomi:
   a) $X^5 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$
   b) $X^4 + 6X^3 + 6X^2 + 54X^3 + 12 \in \mathbb{Q}[X]$
   c) $X^4 + X^3 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$
   d) $3X^4 - 8X^3 + 6X^2 - 3X - 2 \in \mathbb{Q}[X]$
   e) $3X^4 - 8X^3 + 6X^2 - 3X - 2 \in \mathbb{Z}_2[X]$
   f) $X^5 + 2X^4 - X^3 - 2X^2 - 2X - 4 \in \mathbb{Q}[X]$
   g) $X^3 + 3X^3 + 3X + 4 \in \mathbb{Z}_7[X]$
   h) $X^2 + Y^2 + 1 \in \mathbb{R}[X, Y]$
   i) $X^2 - 2Y^2 \in \mathbb{Q}[X, Y]$
   j) $X^2 - 2Y^2 \in \mathbb{R}[X, Y]$
   k) $X^2 + Y^2 \in \mathbb{C}[X, Y]$
   l) $X^7 + 36X^5 - 12X^2 + Y \in \mathbb{C}[X, Y]$

2. Dimostrare che, se n non è primo, $\mathbb{Z}_n$ non è un campo.

3. Esibire un polinomio $f(X)$ a coefficienti interi, irriducibile in $\mathbb{Q}[X]$, di grado n, per $n \in \{2, 3, 4, 79\}$.

4. Esibire un polinomio $f(X)$ a coefficienti interi, di grado n, senza radici intere e riducibile su $\mathbb{Z}[X]$, per $n \in \{2, 3, 4, 79\}$.

5. Determinare tutti i polinomi di secondo grado irriducibili su $\mathbb{Z}_3[X]$.

6. Sia K un campo, siano $p_1, \dots, p_n$ polinomi irriducibili su $K[X]$ e siano $a_1, \dots, a_n$ interi. Dimostrare che l'anello $K[X]/(p_1^{a_1} \cdots p_n^{a_n})$ è isomorfo al prodotto diretto $K[X]/(p_1^{a_1}) \times \cdots \times K[X]/(p_n^{a_n})$.

7. Dimostrare che $\mathbb{R}[X]$ non ammette alcun polinomio irriducible di grado dispari.

8. Scomporre $X^3Y + X^3Z + Y^3X + Y^3Z + Z^3X + Z^3Y$ come funzione dei polinomi simmetrici elementari.

9. Determinare se $\alpha(X) := 2X^5 - 5X^3 - 4X^2 - 3X - 3$ è invertibile in $\mathbb{Q}[X]/(\beta(X))$, dove $\beta(X) = 2X^4 - 7X^2 - 4$, ed in caso affermativo determinarne l'inverso.

10. Calcolare il discriminante di $f(X) = \frac{X^p - 1}{X - 1}$ attraverso la definizione.