Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazioni di AL310

A.A. 2015–2016 - Docente: Prof. S. Gabelli

Esercitatore: Dario Spirito

Esercitazione 2
13 ottobre 2015

1. Sia $F \subseteq K$ un estensione di campi, e sia $\alpha \in K$. Dimostrare che $F(\alpha) = F\left(\frac{1}{\alpha}\right)$.

2. Siano α, β due elementi algebrici su un campo F, tali che $\beta = \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}$ per due polinomi $f, g \in F[X]$, con $\beta \notin F$. Dimostrare che $[F(\alpha,\beta) : F(\beta)] \leq \max(\partial f, \partial g)$.

3. Calcolare il polinomio minimo dei seguenti elementi sul campo indicato.

   a) $\sqrt{5}$ su $\mathbb{Q}$
   b) $\frac{1}{3}\sqrt{2} - 4$ su $\mathbb{Q}$
   c) $\sqrt[n]{p}$, con p numero primo, su $\mathbb{Q}$
   d) $\frac{2}{3}\sqrt{5} + 1$ su $\mathbb{Q}$
   e) $\sqrt{3} - \sqrt{7} + 5$ su $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$ e $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$
   f) ξ_{16} su $\mathbb{Q}(i)$
   g) $\sqrt{5} + \sqrt{7}$ su $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$
   h) $\sqrt[3]{2 - \sqrt[5]{3}}$ su $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{3})$
   i) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ su $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$
   j) $\sqrt[3]{5} - i$ su $\mathbb{Q}$
   k) i su $\mathbb{R}$
   l) $\sqrt[5]{2 + \sqrt[3]{1 + \sqrt{2}}}$ su $\mathbb{Q}$
   m) $i\pi$ su $\mathbb{Q}$
   n) $i\pi$ su $\mathbb{R}$
   o) $\sqrt{2} + i$ su $\mathbb{Q}$
   p) $\xi_5 + \xi_5^{-1}$ su $\mathbb{Q}$
   q) $\cos^2\left(\frac{2\pi}{7}\right)$
   r) $\sin^2\left(\frac{2\pi}{7}\right)$
   s) $\sqrt[3]{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}}$ su $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$

4. Calcolare il grado dei seguenti ampliamenti:

   a) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{7}, \sqrt{13})$
   b) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{12}, \sqrt{15})$
   c) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$
   d) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{60})$
   e) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{6}, \sqrt{10}, \sqrt{15})$
   f) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\frac{2}{3}\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2} - 1)$
   g) $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{6})$
   h) $\mathbb{Q}(\sqrt{3} + i\sqrt{5}, \frac{5}{7}\sqrt{11}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{11} - 7, 2i\sqrt{5} - \sqrt{3})$
   i) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{\sqrt{3} + i\sqrt[4]{3}})$
   j) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\xi_5)$
   k) $\mathbb{Q}(\pi^4) \subseteq \mathbb{Q}(\pi)$
   l) $\mathbb{Q}(\pi) \subseteq \mathbb{Q}(\pi, \sqrt[3]{7})$
   m) $\mathbb{Q}(\pi^3 - \pi^2) \subseteq \mathbb{Q}(\pi)$

5. Dimostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, l'elemento $\cos(\frac{2\pi}{n})$ è algebrico su $\mathbb{Q}$.

6. Determinare il campo di spezzamento in $\mathbb{C}$ dei seguenti polinomi e calcolarne il grado:

   a) $X^3 - a$ su $\mathbb{Q}$ $(a \in \mathbb{Q})$

b) $X^n - 2$ su $\mathbb{Q}$

c) $(X^2-5)(X^3-7)$ su $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}(\sqrt{\xi_3})$

d) $X^4 + 30X^2 + 45$ su $\mathbb{Q}$

e) $X^4 - X^2 + 5$ su $\mathbb{Q}$

f) $X^6 - X^5 + 3X^4 - 3X^2 + 9X - 9$ su $\mathbb{Q}$

g) $X^6 - 4X^4 - 2X^2 + 3$ su $\mathbb{Q}$

h) $X^3 + X + 1$ su $\mathbb{Q}$ e su $\mathbb{Q}(\sqrt{-31})$

7. Sia $c > 0$. dimostrare che il campo di spezzamento del polinomio $X^3 + cX + 1$ ha grado 6 su $\mathbb{Q}$.

8. Fattorizzare su $\mathbb{R}$ il polinomio $X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.

9. Sia $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ un polinomio biquadratico irriducibile. Dimostrare che il suo campo di spezzamento ha grado al più 8 su $\mathbb{Q}$, e determinarne tutti i possibili gradi.

10. Determinare il polinomio minimo su $\mathbb{Q}$ di $\beta = \alpha + 1$, $\gamma = \frac{1}{1-\alpha}$, $\delta = \alpha^2$ ed $\epsilon = \alpha^2 + 1$ nei seguenti casi:

    a) α verifica $\alpha^3 + 5\alpha^2 - 5\alpha^2 + 5 = 0$;

    b) α verifica $\alpha^8 + 3\alpha^6 + 6\alpha^4 - 15 = 0$;

    c) α verifica $\alpha^5 + 6\alpha^3 - 2\alpha^2 + 2 = 0$.

11. Spiegare perché il problema dell'esercizio precedente non è ben posto se l'unica informazione su α è che verifica $\alpha^4 + 3\alpha^2 + 2 = 0$.

12. Sia $f(X) = f_0 + f_1X + \cdots + f_nX^n$ un polinomio irriducibile su un campo K e sia α una sua radice. Determinare il polinomio minimo di α^{-1} su K.

13. Descrivere esplicitamente gli elementi dei seguenti campi:

    a) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ b) $\mathbb{Q}(\sqrt{3} + \sqrt{5})$ c) $\mathbb{Q}(\pi, \sqrt{5})$

14. Sia $F \subseteq K$ un ampliamento di campi, con F e K di caratteristica diversa da 2, e siano $\alpha, \beta \in K$ trascendenti su F.

    a) Si verifichi che almeno uno tra $\alpha - \beta$ e $\alpha + \beta$ è trascendente su F.

    b) Si supponga $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 + 1 = 0$. Si calcoli $[F((\alpha+\beta)^3) : F]$ e $[F((\alpha+\beta)^3) : F(\alpha+\beta)]$.

    c) Si dimostri che il punto (a) non vale se la caratteristica di F è 2.

15. Siano α e β due numeri complessi, entrambi trascendenti su $\mathbb{Q}(\sqrt[9]{5})$. Dimostrare che $\mathbb{Q}(\alpha)$ e $\mathbb{Q}(\beta)$ sono campi tra loro isomorfi.

16. Determinare un ampliamento algebrico di grado infinito su $\mathbb{Q}$ che non coincide con la chiusura algebrica $\overline{\mathbb{Q}}$ di $\mathbb{Q}$ su $\mathbb{C}$.

17. Dimostrare che un campo finito non può essere algebricamente chiuso.