Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazioni di AL310

A.A. 2015–2016 - Docente: Prof. S. Gabelli

Esercitatore: Dario Spirito

Esercitazione 4
10 novembre 2015

1. Per ognuno dei seguenti polinomi, determinare il campo di spezzamento su $\mathbb{F}_p$, per i p indicati a fianco:
   a) $X^3 + 2X + 1$, $p = 3, 5, 13$;
   b) $X^4 - X^3 - X + 1$, $p = 2, 3, 11$
   c) $X^4 - X^3 - X - 1$, $p = 3$
   d) $X^5 + 2X^4 + X^2 + 2X + 1$, $p = 3$

2. Sia $f(X) := X^3 + 3X + 3 \in \mathbb{F}_5[X]$.
   a) Dimostrare che f è irriducibile su $\mathbb{F}_5$.
   b) Dimostrare che f è separabile su $\mathbb{F}_5$.
   c) Costruire un'estensione K di $\mathbb{F}_5$ che è un campo di spezzamento di $f(X)$ su $\mathbb{F}_5$.
   d) Esplicitare le radici di f in K.
   e) Calcolare $[K : \mathbb{F}_5]$ e la cardinalità di K.
   f) Dimostrare che il polinomio $F(X, Y) := Y^3 - f(X)$ è irriducibile in $K[X, Y]$.

3. Determinare un campo infinito, estensione algebrica di $\mathbb{F}_p$, che non coincide con la chiusura algebrica di $\mathbb{F}_p$.

4. Scomporre il polinomio $f(X) = X^7 + 1$ su $\mathbb{F}_2$ e determinare un suo campo di spezzamento.

5. Si considerino i polinomi di $\mathbb{F}_2[X]$

$$f(X) := X^4 + X + 1 \quad \text{e} \quad g(X) := X^3 + X + 1.$$

   a) Dimostrare che f e g sono irriducibili su $\mathbb{F}_2$.
   b) Si costruisca un ampliamento di $\mathbb{F}_2$ contenente una radice α di f e una radice β di g.
   c) Si determinino basi di $\mathbb{F}_2(\alpha)$ e $\mathbb{F}_2(\beta)$ su $\mathbb{F}_2$.
   d) Spiegare perché le radici di f sono α, α^2, α^4 e α^8, e descriverle esplicitamente.
   e) Spiegare perché le radici di g sono β, β^2 e β^4, e descriverle esplicitamente.

f) È vero che $\mathbb{F}_2(\alpha) = \mathbb{F}_2(\alpha^2 + 1)$? È vero che $\mathbb{F}_2(\beta) = \mathbb{F}_2(\beta^2 + 1)$?

g) Determinare un campo di spezzamento L di $f(X)g(X)$ su $\mathbb{F}_2$, calcolarne il grado e determinarne tutti gli automorfismi.

6. Determinare tutti i polinomi su $\mathbb{F}_2$ irriducibili di grado n, per $1 \leq n \leq 8$.

7. Determinare tutti i polinomi su $\mathbb{F}_3$ irriducibili di grado 4.

8. Determinare il numero di polinomi irriducibili di grado 6 su $\mathbb{F}_5$.

9. Dimostrare che, se p è numero primo, tutti i gruppi di ordine p sono ciclici.

10. Dimostrare che, per ogni intero positivo n, esiste un gruppo di ordine n. È vero se aggiungiamo la richiesta che sia non abeliano?

11. Determinare (a meno di isomorfismi) tutti i gruppi di ordine 3, 4, 5 e 6.

12. Dimostrare che il gruppo delle unità di $\mathbb{Z}_{15}$ non è ciclico esibendo un suo sottogruppo proprio non ciclico.

13. Sia H un sottogruppo di S_n. Dimostrare che, se $H \not\subseteq A_n$, allora esattamente metà delle permutazioni di H sono pari.

14. Dimostrare che un sottogruppo è normale se e solo se è unione di classi di coniugio.

15. Dimostrare che un sottogruppo di indice 2 è normale.

16. Determinare tutti i sottogruppi dei seguenti gruppi, e determinare quali di essi sono normali.

    a) $\mathbb{Z}_5$
    b) $\mathbb{Z}_8$
    c) $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2$
    d) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
    e) $\mathbb{Z}_{12}$
    f) S_3
    g) A_4

17. Sia D_n il gruppo diedrale con $2n$ elementi, ovvero il gruppo delle isometrie di un poligono regolare con n lati. Tale gruppo può anche essere espresso con la presentazione $\langle \sigma, \tau \mid \sigma^n = \tau^2 = 2, \sigma^k \tau = \tau \sigma^{n-k} \rangle$.

    a) Dimostrare che D_n è un sottogruppo del gruppo simmetrico S_n.
    b) Dimostrare che il sottogruppo generato da σ è un sottogruppo normale di D_n.
    c) Dimostrare che $D_3 \simeq S_3$.
    d) Determinare tutti i sottogruppi di D_4 e la loro classe di isomorfismo.

18. Scrivere i seguenti elementi di S_9 come prodotto di cicli disgiunti e come prodotto di trasposizioni:

    a) (12)(13)(14)(15)
    b) (4589)(17)
    c) (123)(453)(2897)
    d) (147)(148)(149)
    e) (1234567)(12345678)
    f) (12389)(34758)(2987)