Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazioni di AL310

A.A. 2015–2016 - Docente: Prof. S. Gabelli
Esercitatore: Dario Spirito

Esercitazione 6
10 dicembre 2015

1. Esplicitare la corrispondenza di Galois per l'estensione $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\xi_n)$, per $3 \leq n \leq 25$.

2. Siano $p_1, \ldots, p_n$ numeri primi, e sia $K := \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_n})$. Determinare il grado $[K : \mathbb{Q}]$.

3. a) Determinare tutti gli ampliamenti quadratici di $\mathbb{Q}$ contenuti in $\mathbb{Q}(\xi_p)$, per p primo.
   b) Dimostrare che tutti gli ampliamenti quadratici di $\mathbb{Q}$ sono contenuti in un ampliamento ciclotomico;[1] determinare esplicitamente un ampliamento ciclotomico che contiene $\sqrt{d}$ per $d = 2, 3, 5, -15, -21$.
   c) Dedurne che se $F = \mathbb{Q}(\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \ldots, \sqrt{a_k})$ allora F è contenuto in un ampliamento ciclotomico.
   d) Dimostrare che se $\mathbb{Q} \subset F$ è normale e $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}} F \simeq \mathbb{Z}_2^k$ per un intero k allora F è contenuto in un ampliamento ciclotomico.
   e) Dimostrare che, per ogni $k \geq 4$, non esistono n per cui $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\xi_n) \simeq \mathbb{Z}_2^k$.

4. Esplicitare la corrispondenza di Galois per i campi di spezzamento su $\mathbb{Q}$ dei seguenti polinomi:

   a) $X^4 - 2$
   b) $X^4 + 7X^2 + 10$
   c) $X^4 + 30X^2 + 45$
   d) $X^4 + 30X^2 + 35$
   e) $X^4 - X^3 + 3X^2 - 3$
   f) $X^4 + 4X^2 + 1$
   g) $X^4 + 36X^2 + 12$
   h) $X^5 - 2$
   i) $X^7 - 5$

5. Esplicitare la corrispondenza di Galois per i campi di spezzamento dei seguenti polinomi:
   a) $X^2 + X + 2 \in \mathbb{F}_3[X]$
   b) $X^7 + X^6 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$
   c) $X^4 + 2X^2 + X + 1 \in \mathbb{F}_5[X]$
   d) $X^2 + X + 1 \in \mathbb{F}_4[X]$

[1] Suggerimento: $\mathbb{Q}(\xi_n)$ è il composto degli $\mathbb{Q}(\xi_p)$ sui divisori primi di n.

6. Sia p un numero primo. Dimostrare che un gruppo di ordine $2p$ è risolubile.

7. Sia $K \subseteq L$ un ampliamento finito e separabile di grado d. Mostrare che il numero di campi intermedi tra K e L è al più $2^{d!}$.

8. Stabilire quali dei seguenti gruppi sono risolubili:

   a) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$

   b) $\mathbb{Z}_2 \times S_3$

   c) S_5

   d) A_4

   e) D_{15}

   f) $\mathbb{H}$

9. Sia p un numero primo. Dimostrare che ogni gruppo di ordine p^n è risolubile.[2]

10. Determinare due estensioni ciclotomiche $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\xi_n)$ distinte che contengono un sottocampo K tale che $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}} K \simeq \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{10}$.

11. Sia α una radice del polinomio $X^3 + 3X + 3 \in \mathbb{Q}[X]$. Determinare tutti i campi intermedi tra $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}(\alpha)$.

La regola dei segni di Cartesio

Diciamo che $f(X) \in \mathbb{R}[X]$ ha una *variazione* (*di segno*) se due suoi termini consecutivi non nulli hanno segno opposto. Allora:

- Il numero delle radici reali positive di $f(X)$ è al più uguale al numero delle variazioni.
- Il numero delle radici reali negative di $f(X)$ è al più uguale al numero delle variazioni di $f(-X)$.

12. Determinare il gruppo di Galois dei seguenti polinomi:[3]

    a) $X^5 - 8X + 2$

    b) $X^5 - 8X^4 + 2X^2 + 2$

[2] Suggerimento: pensare al suo centro.

[3] Suggerimento: trovare alcuni valori del polinomio.