

**Università degli Studi Roma Tre**  
**Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2013/2014**  
**AL310 - Teoria di Galois (prof. Gabelli)**  
**Esercizi 1**

1. Siano  $z, z' \in \mathbb{C}$ . Verificare che

$$\|z\| \cdot \|z'\| = \|zz'\|$$

(dove, se  $z = a + bi$ ,  $\|z\| = a^2 + b^2$  è la *norma* di  $z$ ).

2. Si scrivano i seguenti numeri complessi, i loro coniugati ed i loro inversi in *forma trigonometrica*, ovvero nella forma  $\rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ , con  $\rho \in \mathbb{R}^+$ , e  $0 < \theta \leq 2\pi$ :

$$5, -7, i, -3i, 1 + i, -\sqrt{3} + i.$$

Determinare inoltre le loro radici terze e quarte e rappresentarle sul piano di Gauss.

3. Sia  $\xi = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$  una radice  $n$ -sima dell'unità. Se  $m$  è il minimo intero positivo tale che  $\xi^m = 1$ , si dice che  $\xi$  ha *ordine*  $m$ . Con questa terminologia, le radici *primitive*  $n$ -sime sono esattamente quelle di ordine  $n$ .

Dimostrare che:

- (1) Se  $k$  divide  $n$ ,  $\xi$  ha ordine  $\frac{n}{k}$ ;
- (2) Se  $m$  è l'ordine di  $\xi$ ,  $m$  divide  $n$  (*Suggerimento*: dividere  $n$  per  $m$ );
- (3) Se  $d := MCD(n, k)$ , l'ordine di  $\xi$  è  $\frac{n}{d}$ ;
- (4)  $\xi$  è una radice  $n$ -sima primitiva se e soltanto se  $d := MCD(n, k) = 1$ ;
- (5) Se  $\xi$  è una radice  $n$ -sima primitiva, tutte e sole le radici  $n$ -sime di 1 sono

$$\xi, \xi^2, \dots, \xi^n = 1.$$

4. Determinare il gruppo delle radici  $n$ -sime dell'unità per  
 $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12$ .

Stabilire inoltre qual è l'ordine di ogni radice.

5. Calcolare i lati di un rettangolo la cui area è di  $204 m^2$  e il cui perimetro è di  $80 m$ .
6. Sia  $f(X) = X^3 + X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$  e siano  $\rho \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma, \tau$  le sue radici. Mostrare che  $\sigma + \tau = -\rho$  e  $\sigma\tau = \rho^{-1}$ .
7. Mostrare che un polinomio  $f(X) \in K[X]$  è irriducibile se e soltanto se lo è la sua forma ridotta.
8. Risolvere le seguenti equazioni di terzo grado usando le formule di Tartaglia -Cardano:

$$X^3 + 9X - 10, \quad X^3 + 6X - 20, \quad X^3 + 6X - 7.$$

9. Mostrare che l'equazione

$$f(X) = X^3 - 2pX + p \in \mathbb{Q}[X]$$

con  $p$  primo, ha tre radici reali distinte e determinare queste radici con le formule di Tartaglia-Cardano.

10. Trovare le radici complesse dei seguenti *polinomi reciproci* usando la sostituzione  $Y = X + \frac{1}{X}$ :

$$X^4 + 2X^3 + 2X + 1; \quad X^5 + X^4 + X^3 - X^2 - X - 1.$$

11. Trovare le radici complesse del polinomio:

$$X^6 + 3X^4 + 11X^2 + 9.$$

12. Determinare le radici delle seguenti equazioni biquadratiche ed esprimerle, se possibile, come somma di radicali.

$$X^4 - 10X^2 + 1, \quad X^4 + 30X^2 + 45, \quad X^4 + 6X^2 + 25, \quad X^4 + 1.$$

13. Esprimere, se possibile, i seguenti radicali doppi come somma di radicali:

$$\sqrt{7 + 2\sqrt{6}}, \quad \sqrt{5 + \sqrt{21}}, \quad \sqrt{9 + 3\sqrt{2}}.$$