Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2015/2016
AL310 - Teoria di Galois (prof. Gabelli)
Esercizi 10

1. Si consideri il polinomio
$$f(X) = X^4 + X^3 - 5X - 5 \in \mathbb{Q}[X].$$
(a) Determinare il gruppo di Galois di $f(X)$ su $\mathbb{Q}$ e la sua struttura come gruppo astratto.
(b) Esplicitare la corrispondenza di Galois per il polinomio $f(X)$ su $\mathbb{Q}$.

2. Si consideri il polinomio
$$f(X) = X^4 - 8X^2 - 2 \in \mathbb{Q}[X].$$
e sia K il suo campo di spezzamento in $\mathbb{C}$.
(a) Dimostrare che $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(K)$ è un gruppo diedrale.
(b) Determinare tutti i sottocampi di K normali su $\mathbb{Q}$.

3. Determinare il gruppo di Galois dei seguenti polinomi:
$$x^5 - 3; \quad x^6 + 3; \quad x^8 - 2$$
ed una sua immersione in S_n (n opportuno).

4. Esprimere il gruppo di Galois del polinomio $X^7 - 2$ come prodotto semidiretto di due sottogruppi di S_7.

5. Esprimere il gruppo di Galois del polinomio $X^8 - 9$ come prodotto semidiretto di due sottogruppi di S_8.

6. Sia dato il polinomio $f(x) := x^5 + 3x^2 - 3x - 3 \in \mathbb{Q}[x]$. Mostrare che il gruppo di Galois di $f(X)$ su $\mathbb{Q}$ è isomorfo a S_5.

7. Determinare tutti gli ampliamenti di grado 3 su $\mathbb{Q}$ contenuti nel 18-simo ampliamento ciclotomico.

8. Sia $\mathbb{Q} \subseteq K$ un ampliamento di Galois di grado 4. Mostrare che se il gruppo di Galois di K su $\mathbb{Q}$ è ciclico, allora $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ con $\alpha = \sqrt{a + b\sqrt{t}}$, $a, b, t \in \mathbb{Q}$.

   Determinare inoltre un tale α per il quinto ampliamento ciclotomico.

9. Dare un esempio di ampliamento radicale di grado 4 su $\mathbb{Q}$ che non è normale su $\mathbb{Q}$.

10. Supponiamo che K sia un ampliamento normale di $\mathbb{Q}$ con gruppo di Galois isomorfo ad A_4. Mostrare che K non può essere un ampliamento radicale di $\mathbb{Q}$.

11. Sia $F \subseteq K$ un ampliamento normale. Dimostrare che se $Gal_F K$ è abeliano, ogni campo intermedio è normale su F.

12. Sia $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ un polinomio irriducibile con gruppo di Galois isomorfo a $\mathbb{Z}_p$, $p \geq 3$ primo.

    Dimostrare che $f(X)$ è un polinomio di grado p le cui radici sono tutte reali.

13. Siano $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$ un polinomio monico di grado $n \geq 2$ e p un numero primo. Si indichi con $\bar{f}(X)$ il polinomio di $\mathbb{F}_p[X]$ che si ottiene a partire da $f(X)$ quozientando i suoi coefficienti modulo p.

    Dimostrare che se il gruppo di Galois G di $\bar{f}(X)$ su $\mathbb{F}_p$ è isomorfo ad un sottogruppo transitivo di S_n, allora anche il gruppo di Galois H di $f(X)$ su $\mathbb{Q}$ è isomorfo ad un sottogruppo transitivo di S_n.

14. Siano $f(X) := X^3 + X + 1$, $g(X) := X^3 + X^2 + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$.

    (a) Mostrare che $f(X)$, $g(X)$ sono irriducibili su $\mathbb{F}_2$.

    (b) Data una radice α di $f(X)$ e una radice β di $g(X)$, costruire i campi $F = \mathbb{F}_2(\alpha)$ e $K = \mathbb{F}_2(\beta)$.

    (c) Mostrare che F e M sono isomorfi e costruire esplicitamente tutti gli isomorfismi tra F e K.

15. Siano $f(X) := X^2 + X + 2$, $g(X) := X^4 + X^2 + 2 \in \mathbb{F}_3[X]$.

    (a) Mostrare che $f(X)$, $g(X)$ sono irriducibili su $\mathbb{F}_3$.

(b) Data una radice α di $f(X)$ e una radice β di $g(X)$, costruire i campi $F = \mathbb{F}_3(\alpha)$ e $K = \mathbb{F}_3(\beta)$.

(c) Mostrare che $F \subseteq K$ e fattorizzare $g(X)$ su F.

(d) Costruire gli automorfismi di K estendendo gli automorfismi di F.

16. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere e quali false, motivando brevementele risposte:

    (a) Ogni estensione algebrica di $\mathbb{Q}$ è finita.

    (b) Ogni estensione algebrica di $\mathbb{Q}$ è finitamente generata.

    (c) Ogni estensione algebrica di $\mathbb{Q}$ è semplice.

    (d) Ogni estensione finita di $\mathbb{Q}$ è semplice.

    (e) Ogni campo di caratteristica finita ha un numero finito di elementi.

    (f) Ogni estensione finita del campo $\mathbb{F}_p$ è il campo di spezzamento di qualche polinomio a coefficienti in $\mathbb{F}_p$.

    (g) Ogni campo finito è algebricamente chiuso.

    (h) Ogni ampliamento finito di $\mathbb{F}_p$ è normale.

    (i) Ogni ampliamento normale di $\mathbb{F}_p$ è finito.

    (j) Ogni ampliamento normale di un campo F è algebricamente chiuso.

    (k) Ogni campo algebricamente chiuso è normale sul suo sottocampo fondamentale.