Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2015/2016
AL310 - Teoria di Galois (prof. Gabelli)
Esercizi 2

1. Verificare che i seguenti polinomi di $\mathbb{Z}[X, Y, Z]$ sono simmetrici ed esprimerli come polinomi valutati nelle funzioni simmetriche elementari:
$$X^3 + Y^3 + Z^3, \quad (X + Y)(X + Z)(Y + Z), \quad X^2Y^2 + X^2Z^2 + Y^2Z^2.$$

2. Dimostrare che, per ogni permutazione $\sigma \in S_n$, l'applicazione
$$F(X_1, \dots, X_n) \longrightarrow F(X_1, \dots, X_n)\,; \quad \varphi(X_1, \dots, X_n) \mapsto \varphi(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)})$$
è un automorfismo di campi.

3. (*Determinante di Vandermonde*). Sia $A[X_1, \dots, X_n]$ l'anello dei polinomi in n indeterminate a cofficienti nel dominio A. Data la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ X_1 & X_2 & \dots & X_n \\ X_1^2 & X_2^2 & \dots & X_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_1^{n-1} & X_2^{n-1} & \dots & X_n^{n-1} \end{pmatrix}$$
si indichi con $V(\mathbf{X}) := V(X_1, \dots, X_n)$ il determinante di M. Dimostrare che
$$V(\mathbf{X}) = \prod_{1 \le i < j \le n} (X_i - X_j)$$
Suggerimento: Si proceda per induzione su n e si usino le operazioni elementari su righe e colonne della matrice.

4. Dimostrare che un polinomio e la sua forma ridotta hanno lo stesso discriminante.

5. Calcolare il discriminante del polinomio $X^3 + pX + q \in \mathbb{Q}[X]$.

6. Calcolare il discriminante del polinomio $X^4 + bX^2 + c \in \mathbb{Q}[X]$.

7. Calcolare il discriminante del polinomio $X^n + a \in \mathbb{Q}[X]$, $n \ge 2$.

8. Calcolare il discriminante del p-esimo polinomio ciclotomico $\Phi_p(X)$. *Suggerimento*: Scrivere $\Phi_p(X) = (X^p - 1)/(X - 1)$ ed usare la formula $D(f) = \prod_i f'(\alpha_i)$.

9. Sia $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ un polinomio monico di terzo grado che ha una radice razionale $a \in \mathbb{Q}$. Calcolare il discriminante di $f(X)$.

10. Mostrare che un polinomio su $\mathbb{Q}$ con tutte radici reali ha discriminante positivo.