Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2015/2016
AL310 - Teoria di Galois (prof. Gabelli)
Esercizi 3

1. Sia $F \subseteq K$ un ampliamento di campi e sia $\alpha \in K$. Mostrare che
   (a) α è algebrico su F se e soltanto se α^n è algebrico su F .
   (b) Se α ha grado dispari su F, allora α^2 ha lo stesso grado di α.

2. Stabilire se $\pi + \frac{1}{\pi}$ è algebrico o trascendente su $\mathbb{Q}$ e su $\mathbb{Q}(\pi^2)$.

3. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Mostrare che:
   (1) Se α e β hanno lo stesso polinomio minimo su $\mathbb{Q}$, allora $\mathbb{Q}(\alpha)$ e $\mathbb{Q}(\beta)$ sono campi isomorfi. Dare inoltre un esempio in cui $\mathbb{Q}(\alpha) \neq \mathbb{Q}(\beta)$.
   (2) Dare un esempio in cui $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\beta)$ ma α e β non hanno lo stesso polinomio minimo su $\mathbb{Q}$.

4. Stabilire se $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ e $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ sono campi isomorfi.

5. Determinare il polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}$ per i seguenti valori di α:
$$1+i, \quad \sqrt[3]{4}, \quad \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2} \quad \sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

6. Sia $\alpha := \sqrt[4]{3}$ e $K := \mathbb{Q}(\alpha)$.
   (a) Determinare il polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}$.
   (b) Verificare che $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \subseteq K$ e determinare il polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.
   (c) Posto $\beta := \sqrt{3}+\sqrt[4]{27}-2$, dire perchè $\beta \in K$, determinare l'inverso razionalizzato di β in K e il polinomio minimo di β su $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

7. Sia $F \subseteq E$ un ampliamento di campi e sia $\alpha \in E$. Determinare il polinomio minimo di α su F nei seguenti casi:
   (a) $E = \mathbb{Q}(\tau)$ con $\tau^3 = 3\tau + 2, \quad F = \mathbb{Q}, \quad \alpha = 2\tau^2 - \tau + 2 \in E$
   (b) $E = \mathbb{F}_7(\rho)$ con $\rho^3 = \rho + 2, \quad F = \mathbb{F}_7, \quad \alpha = 1 + \rho \in E$

8. Sia $f(x) = x^3 - 5x - 1 \in \mathbb{Q}[x]$.

   (a) Sia $\alpha \in \mathbb{C}$ tale che $f(\alpha) = 0$. Considerare l'applicazione

   $$v_\alpha : \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{Q}[\alpha]; \quad h(x) \to h(\alpha).$$

   Dimostrare che $\mathbb{Q}[\alpha]$ è un campo.

   (b) Trovare gli inversi di $\alpha + 1, \quad \alpha^2 + \alpha + 1, \quad 2 + \alpha, \quad \alpha^3 - 5\alpha \quad \alpha^4$ in $\mathbb{Q}(\alpha)$.

   (c) Determinare $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ e una base di $\mathbb{Q}(\alpha)$ su $\mathbb{Q}$

   (d) Ripetere i punti (a) e (c) per il polinomio $g(x) = x^3 - 2x - 2$ e trovare gli inversi di $20\alpha, \quad \alpha + 3, \quad \alpha^5, \quad \alpha^3 - 2\alpha$.

9. Sia $f(x) = x^4 + 11x^3 + 15x^2 - 22x - 5 \in \mathbb{Q}[X]$.

   (a) Decomporre $f(x)$ in fattori irriducibili in $\mathbb{Q}[X]$.

   (b) Stabilire se $\mathbb{Q}[X]/(f(x))$ è un campo e/o un dominio.

   (c) $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ tale che $f(\alpha) = 0$ determinare $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ e una base di $\mathbb{Q}(\alpha)$ come $\mathbb{Q}$-spazio vettoriale

10. Costruire esplicitamente i campi $\mathbb{Q}(\alpha)$ per i seguenti valori di α:

   $$\sqrt[5]{2}, \quad \sqrt{3} + 2i, \quad ln(2).$$

11. Costruire esplicitamente i campi:

   $$\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5}), \quad \mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{5} + 2i), \quad \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3}), \quad \mathbb{Q}(\pi, 2 + i).$$

12. Sia K un ampliamento quadratico di $\mathbb{Q}$. Mostrare che $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, dove $d \in \mathbb{Z}$ ed è privo di fattori quadratici.

13. Siano a, b due interi positivi. Mostrare che

   $$\mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b}) = \mathbb{Q}(x\sqrt{a} + y\sqrt{b}),$$

   per ogni x, $y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.