Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2014/2015
AL310 - Teoria di Galois (prof. Gabelli)
Esercizi 4

1. Siano K un campo, $f(X) \in K[X]$ un polinomio irriducibile, L un campo di spezzamento di f su K.
   (a) Dimostrare che se $\alpha, \beta \in L$ sono radici di $f(X)$, allora $K(\alpha)$ e $K(\beta)$ sono isomorfi come campi e come K-spazi vettoriali.
   (b) Stabilire, motivando la risposta, se l'asserzione (a) è vera quando $f(X)$ è riducibile.

2. Sia $c > 0$. Determinare il grado su $\mathbb{Q}$ del campo di spezzamento in $\mathbb{C}$ del polinomio $X^3 + cX + 1$.

3. Mostrare che il campo di spezzamento in $\mathbb{C}$ di $f(x) = x^4 + 2x^2 + 9$ è $\mathbb{Q}(i\sqrt{2})$.

4. Mostrare che i polinomi $x^4 - 9$ e $x^4 - 2x^2 - 3$ hanno lo stesso campo di spezzamento in $\mathbb{C}$.

5. Determinare il campo di spezzamento in $\mathbb{C}$ dei seguenti polinomi e calcolarne il grado su $\mathbb{Q}$:
$$X^4 - X^3 + 4X^2 - 3X + 3\,, \quad X^9 - 1\,, \quad X^7 - 2.$$
$$X^4 + X^2 - 1\,, \quad X^4 + 30X^2 + 45\,, \quad X^4 + X^3 + X^2 + X + 1.$$

6. Sia $K = \mathbb{Q}(\sqrt{6}, \sqrt{14}, \sqrt{21})$.
   (a) Calcolare $[K : \mathbb{Q}]$ e trovare una base di K su $\mathbb{Q}$.
   (b) Dimostrare che K è il campo di spezzamento del polinomio $f(X) = X^4 - 40X^2 + 64 \in \mathbb{Q}$.

7. Determinare il campo di spezzamento su $\mathbb{Q}$ di uno dei seguenti polinomi:
$$X^4 - 9X^2 + 20\,; \quad X^4 - 4X^2 + 2\,; \quad X^4 - 2X^2 - 1$$
   e calcolarne il grado.

8. Calcolare l'n-simo polinomio ciclotomico per $2 \leq n \leq 21$.

9. Sia $m \geq 2$ e $\xi_m = \cos(\frac{2\pi}{m}) + i\sin(\frac{2\pi}{m})$. Mostrare che $\mathbb{Q}(\xi_n) \subseteq \mathbb{Q}(\xi_{2n})$.

   Mostrare inoltre che vale l'uguaglianza se n è dispari e dare un esempio in cui l'inclusione è stretta.

10. Si dimostri che, se $n = 2^h$, con $h \geq 2$, le $\varphi(n)$ radici complesse primitive dell'unità non costituiscono una base dell'n-esimo ampliamento ciclotomico di $\mathbb{Q}$.

11. Sia $\xi_n := \cos(\frac{2\pi}{n}) + i\sin(\frac{2\pi}{n})$, $n \geq 2$. Mostrare che, se $MCD(m, n) = 1$, allora $\zeta := \xi_m\xi_n$ è una radice primitiva mn-sima dell'unità.

12. Mostrare che, se $\eta, \zeta \in \mathbb{C}$ sono radici primitive dell'unità di ordine n ed m rispettivamente, allora $\xi := \eta\zeta$ è una radice primitiva di ordine uguale a $mcm(n, m)$.

13. Ricordiamo che una radice quinta primitiva dell'unità è

$$\varepsilon := \frac{-1+\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}i.$$

   (a) Posto $\alpha := \sqrt{10+2\sqrt{5}}\ i$, dimostrare che $\mathbb{Q}(\varepsilon) = \mathbb{Q}(\alpha)$.

   (b) Calcolare il polinomio minimo $m(X)$ di α su $\mathbb{Q}$.

   (c) Verificare che $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ è il campo di spezzamento di $m(X)$ su $\mathbb{Q}$.

14. Sia $\zeta \in \mathbb{C}$ una radice primitiva ottava dell'unità. Dimostrare che $\mathbb{Q}(\zeta) = \mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$.

15. Sia ξ una radice primitiva nona dell'unità e sia $\alpha := \xi + \xi^{-1}$. Mostrare che il polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}$ è $m(X) := X^3 - 3X + 1$. Poiché la scelta di ξ è arbitraria, dedurne che le radici di $m(X)$ sono $\alpha, \beta := \xi^2 + \xi^{-2}, \gamma := \xi^4 + \xi^{-4}$ e perciò $m(X)$ ha tre radici reali. Mostrare inoltre che $\beta, \gamma \in \mathbb{Q}(\alpha)$.

16. Sia ξ una radice primitiva settima dell'unità. Determinare il polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}$ per $\alpha = \xi^3 + \xi^4$, $\alpha = \xi^3 + \xi^5 + \xi^6$.