Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2015/2016
AL310 - Teoria di Galois (prof. Gabelli)
Esercizi 5

1. Mostrare che $a+bi$ è un numero complesso algebrico se e soltanto se a e b sono reali algebrici.

2. Mostrare che il numero $2+\sqrt[11]{35}-2548\sqrt[31]{987654321}$ è algebrico (su $\mathbb{Q}$).

3. Siano F un campo ed X una indeterminata su F. Dimostrare che se un elemento $f \in F(X)$ è algebrico su F allora $f \in F$.

4. Mostrare che la funzione φ di Eulero assume valori pari, per ogni $n \geq 3$.

5. Fattorizzare $\Phi_n(X)$ in polinomi irriducibili su $\mathbb{R}$.

6. Siano p un numero primo e $k \geq 1$ un intero. Sia $F \subseteq K$ un'estensione di campi di grado p^k. Sia $f(x) \in F[x]$ un polinomio irriducibile su F di grado strettamente compreso tra 1 e p. Dimostrare che $f(x)$ non ha radici in K.

7. Sia F un campo. Si consideri il polinomio

$$f(x) = p_1(x)^{m_1} p_2(x)^{m_2} \dots p_s(x)^{m_s} \in F[x],$$

   $m_i \geq 1$, decomposto nel prodotto dei polinomi irriducibili $p_i(x) \in F[x]$. Dimostrare che, scelti come si voglia gli interi positivi $n_1, n_2, \dots n_s$, $f(x)$ ed $g(x) := p_1(x)^{n_1} p_2(x)^{n_2} \dots p_s(x)^{n_s}$ hanno lo stesso campo di spezzamento su F.

8. Siano p, q numeri primi distinti.

   (a) Determinare un campo di spezzamento K del polinomio

$$X^4 - (p+q)X^2 + pq \in \mathbb{Q}[X]$$

   su $\mathbb{Q}$.

   (b) Calcolare $[K : \mathbb{Q}]$, e determinare due basi distinte di K come $\mathbb{Q}-$spazio vettoriale.