Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2015/2016
AL310 - Teoria di Galois (prof. Gabelli)
Esercizi 6

1. Determinare tutti gli isomorfismi in $\mathbb{C}$ dei seguenti campi e stabilire quali tra essi sono automorfismi:

$$\mathbb{Q}(\sqrt{3}); \quad \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i); \quad \mathbb{Q}(\sqrt[5]{3}); \quad \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}, \sqrt{3}).$$

2. Sia $\xi \in \mathbb{C}$ una radice primitiva settima dell'unità e siano $\alpha := \xi + \xi^{-1}$, $\beta := \xi^3 + \xi^5 + \xi^6$. Determinare i polinomi minimi di α e β su $\mathbb{Q}$ e le loro radici. Quali di esse sono reali?

   Determinare inoltre i polinomi minimi di ξ su $\mathbb{Q}(\alpha)$ e $\mathbb{Q}(\beta)$.

3. Sia $m(X)$ il polinomio minimo su $\mathbb{Q}$ di $\sqrt[3]{5} + i$. Determinare tutte le radici complesse di $m(X)$.

4. Poniamo $\alpha := i + \sqrt[3]{7}$, $K := \mathbb{Q}(\alpha)$.

   (a) Determinare il grado del polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}$.

   (b) Dopo aver mostrato che $\mathbb{Q}(i) \subset K$, determinare tutte le $\mathbb{Q}(i)-$immersioni di K in $\mathbb{C}$.

   (c) Sia $\phi : K \longrightarrow \mathbb{C}$ una immersione di campi. Determinare i possibili valori di $\phi(\alpha + \sqrt[3]{49})$.

5. Si consideri il polinomio $f := X^4 + X^3 + X^2 + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$.

   (a) Determinare un campo L contenente una radice α di f tale che $\alpha \notin \mathbb{F}_2$.

   (b) Dimostrare che f si decompone in fattori lineari in $L[X]$ e quindi $\mathbb{F}_2(\alpha)$ un campo di spezzamento di f su $\mathbb{F}_2$.

   (c) Determinare tutti gli automorfismi di L.

6. Per i valori di p a fianco indicati e ciascuno dei seguenti polinomi $f(X) \in \mathbb{F}_p[X]$, determinare un campo di spezzamento K di $f(X)$ su $\mathbb{F}_p$ ed il grado di K su $\mathbb{F}_p$.

(a) $p = 2$; $X^3 + X + 1$, $X^3 + X^2 + 1$, $X^4 + X + 1$, $X^4 + X^2 + X^3 + X + 1$, $X^4 + 1$, $X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.

(b) $p = 3$; $X^3 + 2X + 1$, $X^4 + 2$, $X^4 - X^3 - X - 1$.

(c) $p = 5$; $X^3 + 2X + 1$.

(e) $p = 7$; $X^3 - 3$, $X^4 + 5$.

(m) $p = 13$; $X^3 - 5$.

7. Siano

$$f(X) := X^2 + 1\,, \quad g(X) := X^2 + 2X + 2 \in \mathbb{F}_3[X].$$

Dimostrare che se K e K' sono campi di spezzamento su $\mathbb{F}_3$ di $f(X)$ e $g(X)$ rispettivamente, allora K e K' sono isomorfi. Inoltre costruire esplicitamente tutti i loro isomorfismi.

8. Siano

$$f(X) := X^3 + X + 1\,, \quad g(X) := X^3 + X^2 + 1 \in \mathbb{F}_2[X].$$

Dimostrare che se K e K' sono campi di spezzamento su $\mathbb{F}_2$ di $f(X)$ e $g(X)$ rispettivamente, allora K e K' sono isomorfi. Inoltre costruire esplicitamente tutti i loro isomorfismi.