Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2015/2016
AL310 - Teoria di Galois (prof. Gabelli)
Esercizi 7

1. Mostrare che esistono infiniti polinomi irriducibili su un campo F.

2. Mostrare che un campo algebricamente chiuso non può essere finito.

3. Determinare il numero dei polinomi di grado 2 irriducibili su $\mathbb{F}_p$.

4. Stabilire se esistono polinomi irriducibili su $\mathbb{F}_3$ di grado 2 o 3 che si spezzano linearmente sul campo con 27 elementi e in caso affermativo determinarne almeno uno.

5. Sia K un campo finito con p^n elementi. Mostrare che ogni elemento di K ha in K una radice p-esima e che tale radice è unica.

6. Sia K un campo di caratteristica prima p. Mostrare che l'applicazione

$$\Phi : K \longrightarrow K, ; \quad x \mapsto x^p$$

   è un omomorfismo di campi. Dedurne che, se K è finito, Φ è un automorfismo di K (Φ si chiama l'*immersione di Fröbenius*).

   Mostrare poi che Φ non è un automorfismo del campo delle funzioni razionali $\mathbb{F}_p(X)$.

7. Un polinomio $f(X) \in F[X]$ si dice separabile su F se i suoi fattori irriducibili non hanno radici multiple. Stabilire quali tra i seguenti polinomi sono separabili su $\mathbb{Q}; \mathbb{C}; \mathbb{F}_2; \mathbb{F}_3$:
   (a) $X^3 + 1$;
   (b) $X^2 - 2X + 1$;
   (c) $6X^2 + X + 1$;
   (d) $X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$;
   (e) $X^9 + X^3 + 1$.

8. Mostrare che un campo di spezzamento del polinomio $f(X) \in F[X]$ è normale su F.

9. Mostrare che ogni ampliamento finito di F è contenuto in un ampliamento finito normale su F.

10. Mostrare che una chiusura algebrica di F è normale su F.